ΜΕΡΟΣ Α΄

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Κλάσματα

2.1 Η έννοια του κλάσματος

- *Κατανοώ την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού του “όλου” σε μέρη*
- *Κατανοώ την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασία αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων.*
- *Υπολογίζω με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα την τιμή ενός μέρους από το όλο.*
- *Υπολογίζω την τιμή του όλου από την τιμή ενός μέρους του.*

2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

- *Κατανοώ την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων.*
- *Απλοποιώ τα κλάσματα.*
- *Μετατρέπω κλάσματα σε ομώνυμα.*
- *Χρησιμοποιώ τη “χιαστί ιδιότητα” για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων:*

  « Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$».

2.3. Σύγκριση κλασμάτων

- *Συγκρίνω κλάσματα.*
- *Λύνω σχετικά προβλήματα.*

2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

- *Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.*
- *Λύνω σχετικά προβλήματα.*

2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.

- *Πολλαπλασιάζω κλάσματα.*
- *Βρίσκω τον αντίστροφο ενός αριθμού.*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων, τις διατυπώνω με τη βοήθεια των συμβόλων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης.*

2.6. Διαίρεση κλασμάτων.

- *Κάνω διαίρεση κλασμάτων.*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ Ο ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΣ
(287 - 212 π.Χ.)

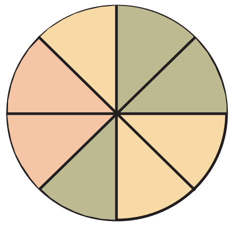
Α.2.1. Η έννοια του κλάσματος

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ένα βράδυ τρεις φίλοι αγοράζουν μια πίτσα και την χωρίζουν σε οκτώ κομμάτια. Ο ένας έφαγε το ένα, ο δεύτερος τα τρία και ο τρίτος δύο κομμάτια από αυτά που περίσσεψαν.

- *Μπορείς να βρεις το μέρος της πίτσας που έφαγε ο καθένας;*
- *Τι μέρος της πίτσας περίσσεψε;*

Σκεφτόμαστε

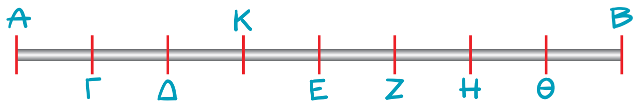


Αφού γνωρίζουμε ότι π.χ. ο πρώτος έφαγε το ένα κομμάτι από τα οκτώ της πίτσας, λέμε ότι έφαγε το $\frac{1}{8}$ της πίτσας. Τότε ο δεύτερος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ και ο τρίτος τα $\frac{2}{8}$ αυτής, Επομένως, και οι τρεις μαζί έφαγαν $1+3+2=6$ από τα οκτώ κομμάτια, δηλαδή τα $\frac{6}{8}$ της πίτσας. Άρα, περίσσεψαν τα υπόλοιπα δύο κομμάτια από τα οκτώ, δηλαδή τα $\frac{2}{8}$ της πίτσας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα, μπορείς να βρεις ποιο μέρος του μήκους του τμήματος ΑΒ είναι το μήκος του τμήματος ΑΚ;

- *Να υπολογίσεις το μήκος του ΑΚ, αν γνωρίζουμε ότι το ΑΒ είναι 32 cm;*
- *Να βρεις ζεύγη τμημάτων που το ένα να είναι:* $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ *του άλλου.*



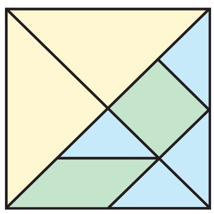
Σκεφτόμαστε

(α) Το τμήμα ΑΒ είναι χωρισμένο σε 8 ίσα μέρη, συνεπώς ένα από αυτά είναι το $\frac{1}{8}$ του ΑΒ και το ΑΚ θα είναι ίσο με τα $\frac{3}{8}$ του ΑΒ.

(β) Επειδή το ΑΒ είναι 32 cm, το $\frac{1}{8}$ αυτού θα είναι: $\frac{1}{8} \cdot 32\ cm = \frac{32}{8}\ cm = 4\ cm$.
Άρα το ΑΚ θα έχει μήκος: $3 \cdot 4\ cm = 12\ cm$.

(γ) Το μήκος του ΑΓ είναι το $\frac{1}{3}$ του ΑΚ και το $\frac{1}{2}$ του ΑΔ. Το ΑΔ είναι τα $\frac{2}{3}$ του ΑΚ και το ΑΚ τα $\frac{3}{2}$ του ΑΔ. Το ΑΕ είναι τα $\frac{4}{3}$ του ΑΚ και το ΑΚ τα $\frac{3}{4}$ του ΑΕ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η



Στο διπλανό σχήμα ένα τετράγωνο έχει χωριστεί, ανάλογα με το χρώμα, σε τριών ειδών μέρη.

- *Μπορείς να βρεις τι κλάσμα του τετραγώνου είναι το καθένα μέρος του;*

Η λέξη **"κλάσμα"** προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη "κλαίω" ή "κλω" που σημαίνει κόβω, τεμαχίζω κάτι. Το κλάσμα λοιπόν δηλώνει ότι έχουμε ένα κομμάτι, δηλαδή ένα μέρος κάποιου πράγματος. Στα Μαθηματικά θεωρούμε ότι αυτό που μοιράζεται, μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη. Έτσι, στα Μαθηματικά το "κλάσμα" πρέπει να δηλώνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε το ολόκληρο (τον "όλον") και πόσα από αυτά πήραμε.

$$\text{Κλάσμα: } \frac{\text{πόσα μέρη πήραμε}}{\text{σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε}} : \frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$$

Στη συνέχεια θα θυμηθούμε όσα ήδη έχουμε μάθει για τα κλάσματα και θα επεκτείνουμε τις γνώσεις μας στις πράξεις των κλασμάτων.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωρισθεί σε **ν** ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά ονομάζεται **νιοστό** και συμβολίζεται με το $\frac{1}{\nu}$.

αριθμητής → 2, κλασματική γραμμή → —, παρονομαστής → 3: $\frac{2}{3}$ όροι του κλάσματος

διαβάζεται "δύο τρίτα"

- Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από **κ** τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ και διαβάζεται **«κάπα νιοστά»**.

$\frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{1}{7}$

$\kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \kappa = \frac{\kappa}{\nu} \quad \nu \neq 0$

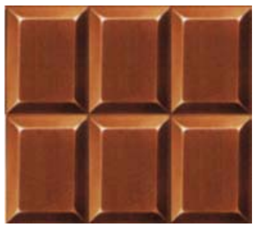
- Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

Είναι $\frac{8}{3} > 1$ διότι $8 > 3$

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1.

$6 = \frac{6}{1}, \quad 15 = \frac{15}{1}, \quad 21 = \frac{21}{1}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. *Μια σοκολάτα ζυγίζει 120 gr και έχει 6 ίσα κομμάτια.*
(α) Ποιο μέρος της σοκολάτας είναι το κάθε κομμάτι;
(β) Πόσα κομμάτια πρέπει να κόψουμε για να πάρουμε 40 gr;

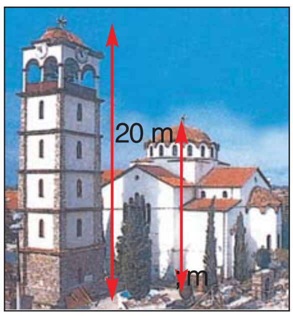
Λύση (α) Το κάθε κομμάτι είναι το $\frac{1}{6}$ της σοκολάτας.

(β) Το βάρος κάθε κομματιού θα είναι το $\frac{1}{6}$ του βάρους της σοκολάτας, δηλαδή

$\frac{1}{6} \cdot 120\ gr = \frac{120}{6}\ gr = 20\ gr$. Άρα τα $40\ gr$ είναι τα $\frac{2}{6}$ της σοκολάτας.

Δηλαδή, πρέπει να κόψουμε 2 κομμάτια για να πάρουμε $40\ gr$.

2. *Το καμπαναριό μιας εκκλησίας έχει ύψος 20 m, ενώ η εκκλησία έχει ύψος τα $\frac{3}{5}$ του ύψους του καμπαναριού.*
Ποιο είναι το ύψος της εκκλησίας;



Λύση Το $\frac{5}{5}$ του ύψους του καμπαναριού είναι $20\ m$, επομένως το $\frac{1}{5}$ αυτού θα είναι $\frac{1}{5} \cdot 20\ cm = \frac{20}{5}\ m = 4\ m$. Τότε τα $\frac{3}{5}$ θα είναι $3 \cdot 4\ m = 12\ m$. Άρα το ύψος της εκκλησίας θα είναι $12\ m$.

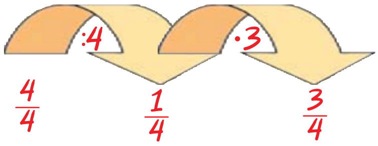
3. *Μια δεξαμενή πετρελαίου σε μια πολυκατοικία, χωράει 2000 lt. Ο διαχειριστής σε μια μέτρηση βρήκε ότι ήταν γεμάτη κατά τα $\frac{3}{4}$. Πόσα λίτρα πετρέλαιο είχε η δεξαμενή;*

Λύση

Η δεξαμενή ολόκληρη είναι τα $\frac{4}{4}$ και χωράει 2000 lt.

Το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής θα χωράει

$\frac{1}{4} \cdot 2000\ lt = \frac{2000}{4}\ lt = 500\ lt.$



Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα $\frac{3}{4}$ θα περιέχουν $3 \cdot 500\ lt = 1500\ lt.$

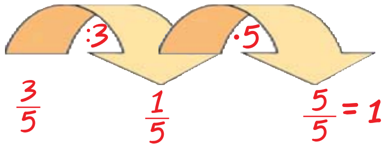
◆ Για να βρούμε την τιμή του μέρους ξεκινάμε από την τιμή του όλου που είναι η τιμή της μονάδας.

4. *Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού τυρί κοστίζουν 27 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{8}{9}$ του κιλού;*

Λύση

Τα $\frac{3}{5}$ κοστίζουν 27 €. Άρα το $\frac{1}{5}$ κοστίζει $27\ € : 3 = 9\ €$.

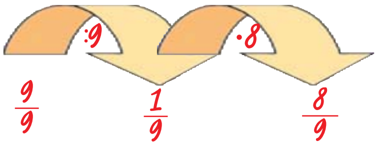
Τα $\frac{5}{5}$ κοστίζουν $5 \cdot 9\ € = 45\ €$.



◆ Για να βρούμε την τιμή του όλου ξεκινάμε από την τιμή του μέρους και υπολογίζουμε την τιμή της μονάδας (αναγωγή στη μονάδα).

Τα $\frac{9}{9}$ κοστίζουν 45€. Άρα το $\frac{1}{9}$ κοστίζει $\frac{45}{9}\ € = 5\ €$.

Έτσι τα $\frac{8}{9}$ κοστίζουν $8 \cdot 5\ € = 40\ €$.



Διότι είναι: $1 = \frac{5}{5} = \frac{9}{9} = ...$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) *Στο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ οι αριθμοί κ και λ ονομάζονται* ....

(β) *Ισχύει ότι: (α) $\frac{\alpha}{1}$ = ... (β) $\frac{\alpha}{\alpha}$ = ... (γ) $\frac{0}{\alpha}$ = ...*

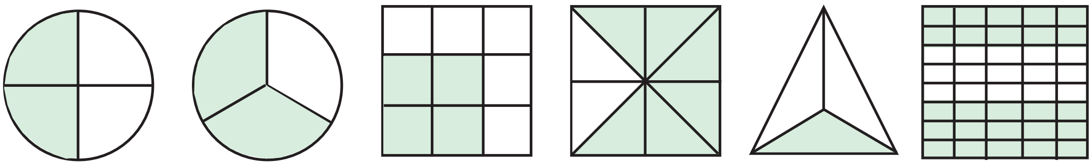
(γ) *Η φράση "το μέρος $\frac{\kappa}{\lambda}$ ενός μεγέθους Α" εκφράζει τον χωρισμό του μεγέθους Α σε* ....

2. *Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{18}{20}$ είναι όλα μικρότερα της μονάδας;*

3. *Τι κλάσμα των μαθητών της τάξης 28 μαθητών είναι οι 4 απόντες;*

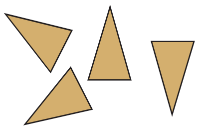
4. *Αν το $\frac{1}{5}$ ενός κιλού καρύδια είναι 14 καρύδια, το κιλό περιέχει 70 καρύδια;*

5. Τα παρακάτω σχήματα έχουν χωριστεί σε ίσα μέρη. Γράψε για το καθένα από αυτά, το κλάσμα που εκφράζει το χρωματισμένο μέρος του.



6. Από μία τούρτα περίσσεψαν τα κομμάτια που βλέπεις στο σχήμα τα οποία αποτελούν τα $\frac{2}{7}$ της τούρτας.

Πόσα ήταν αρχικά όλα τα κομμάτια της τούρτας;



7. Βρες ποιο μέρος του κιλού είναι τα: (α) 100, (β) 250, (γ) 500, (δ) 600 γραμμάρια.

8. Ποιο μέρος: (α) του μήνα, (β) του εξαμήνου, (γ) του έτους είναι οι 15 ημέρες;

9. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{2}{5}$ της αρχικής τιμής τους. Ένα φόρεμα κόστιζε 90 € πριν την έκπτωση. Υπολόγισε πόσα ευρώ έκπτωση έγινε στο φόρεμα και πόσο θα πληρώσουμε για να το αγοράσουμε.

10. Σε μια τάξη τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών μαθαίνουν αγγλικά. Να βρεις πόσους μαθητές έχει η τάξη, αν γνωρίζεις ότι αυτοί που μαθαίνουν αγγλικά είναι 12 μαθητές.

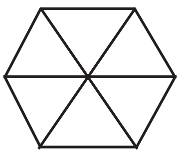
11. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μια πλευρά του είναι 33 εκατοστά και η άλλη τα $\frac{3}{11}$ της πρώτης. Να βρεις την περίμετρο του ορθογωνίου.

12. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος 5 εκατοστά. Να σχεδιάσεις: (α) ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με μήκος τα $\frac{8}{10}$ του ΑΒ και (β) ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ με μήκος τα $\frac{6}{5}$ του ΑΒ.

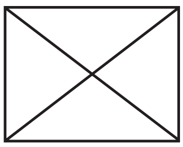
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Χρωμάτισε σε καθένα από τα σχήματα που ακολουθούν τα μέρη που αντιστοιχούν στα κλάσματα που είναι γραμμένα κάτω από κάθε σχήμα.

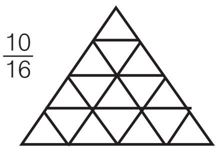
$\frac{2}{6}$



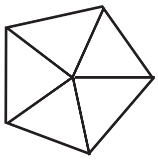
$\frac{1}{4}$



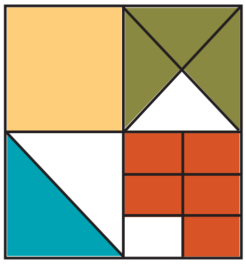
$\frac{10}{16}$



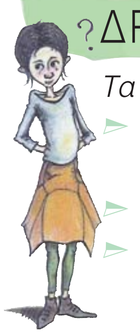
$\frac{3}{5}$



2. Να βρεις ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου είναι κάθε χρωματισμένο μέρος του διπλανού σχήματος.



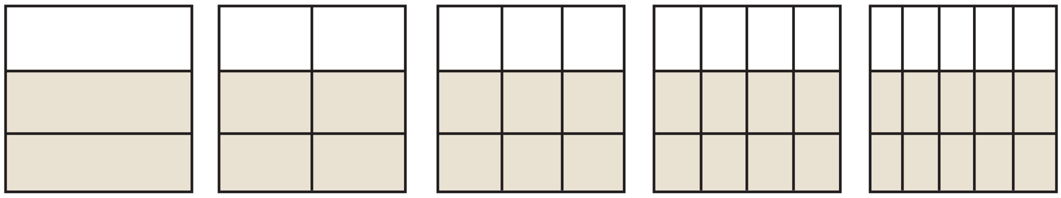
Α.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τα παρακάτω πέντε τετράγωνα είναι χωρισμένα αντίστοιχα, σε ίσα μέρη.

- *Προσπάθησε να βρεις για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του;*
- *Στη συνέχεια σύγκρινε τα κλάσματα, που θα βρεις μεταξύ τους.*
- *Τι παρατηρείς για τα κλάσματα που βρήκες;*



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Δύο κλάσματα $\frac{α}{β}$ και $\frac{γ}{δ}$ λέγονται **ισοδύναμα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε:

$$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$$

$\frac{2}{3}$ και $\frac{10}{15}$ ισοδύναμα

δηλαδή: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

► **Αν δύο κλάσματα $\frac{α}{β}$ και $\frac{γ}{δ}$ είναι ισοδύναμα τότε τα "χιαστί γινόμενα" $α \cdot δ$ και $β \cdot γ$ είναι ίσα.**

Δηλαδή: αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε: $α \cdot δ = β \cdot γ$

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

τότε: $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

► **Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.**

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

► **Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.**

$\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$

- Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση του κλάσματος** και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.

- Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή) λέγεται **ανάγωγο**.

$\frac{7}{12}$ ανάγωγο

αφού ΜΚΔ(7, 12)=1

- Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται **ετερώνυμα**.

$\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$ ομώνυμα

$\frac{2}{7}$, $\frac{5}{3}$ ετερώνυμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να εξετάσετε αν τα κλάσματα: (α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{10}{14}$, (β) $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$ είναι ισοδύναμα.*

Λύση

(α) Υπολογίζουμε τα "χιαστί γινόμενα", δηλαδή: $3 \cdot 14 = 42$ και $5 \cdot 10 = 50$
Τα γινόμενα δεν είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.

(β) Υπολογίζουμε τα "χιαστί γινόμενα": $3 \cdot 48 = 144$ και $8 \cdot 18 = 144$
Τα γινόμενα είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, δηλαδή: $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$

2. *Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{30}{66}$.*

Λύση

Ο ΜΚΔ των όρων του κλάσματος 30 και 66 είναι: ΜΚΔ(30, 66) = 6

Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 6 και έχουμε: $\frac{30}{60} = \frac{30:6}{60:6} = \frac{5}{11}$

3. *Να μετατραπούν σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{5}{20}$*

Λύση

- Πριν από κάθε μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα ελέγχουμε αν τα κλάσματα απλοποιούνται.

ΜΚΔ(5, 20) = 5
Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{5}{20}$ με το 5 και έχουμε: $\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4}$

- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων ετερωνύμων κλασμάτων.

$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ ΕΚΠ(5, 3, 4) = 60

- Διαιρούμε το ΕΚΠ με καθένα από τους παρονομαστές.

$60 : 5 = 12$
$60 : 3 = 20$
$60 : 4 = 15$

- Πολλαπλασιάζουμε τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκαμε.

$\overset{12}{\frac{3}{5}} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{36}{60}$,

$\overset{20}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{40}{60}$,

$\overset{15}{\frac{1}{4}} = \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{15}{60}$

Επομένως τα κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμα ομώνυμα: $\frac{36}{60}$, $\frac{40}{60}$ και $\frac{15}{60}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα, όταν ....

(β) Αν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, τότε οι όροι α, β, γ και δ συνδέονται με τη σχέση: ....

(γ) Ανάγωγο λέγεται το κλάσμα, το οποίο ....

(δ) Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν ....

(ε) Ετερώνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν ....

(στ) Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ΜΚΔ τους, το κλάσμα γίνεται ....

2. Να εξετάσεις ποια από τα κλάσματα είναι ισοδύναμα:
(α) $\frac{2}{3}$, $\frac{18}{27}$, (β) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, (γ) $\frac{7}{8}$, $\frac{30}{40}$, (δ) $\frac{13}{14}$, $\frac{26}{28}$.

3. Να μετατρέψεις καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό 100: (α) $\frac{3}{4}$, (β) $\frac{8}{5}$, (γ) $\frac{4}{20}$, (δ) $\frac{5}{2}$, (ε) $\frac{60}{75}$.

4. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή τον αριθμό 3:
(α) $\frac{10}{6}$, (β) $\frac{50}{30}$, (γ) $\frac{18}{27}$.

5. Να τρέψεις το κλάσμα $\frac{2}{3}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή:(α) 6, και (β) 15.

6. Να συμπληρώσεις τα κενά, ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα:
(α) $\frac{2}{3} = \frac{22}{...}$, (β) $\frac{...}{5} = \frac{9}{15}$, (γ) $\frac{14}{4} = \frac{...}{20}$, (δ) $\frac{48}{36} = \frac{...}{24}$.

7. Να απλοποιήσεις τα κλάσματα: (α) $\frac{25}{30}$, (β) $\frac{12}{9}$, (γ) $\frac{32}{56}$.

8. Να βρεις ποια από τα κλάσματα είναι ανάγωγα:(α) $\frac{32}{30}$, (β) $\frac{15}{14}$, (γ) $\frac{51}{16}$, (δ) $\frac{26}{50}$.

9. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα: (α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{9}$, (β) $\frac{7}{8}$ και $\frac{3}{10}$, (γ) $\frac{11}{3}$ και $\frac{7}{12}$.

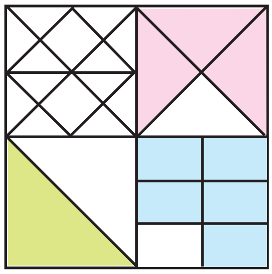
10. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Το κλάσμα $\frac{10}{25}$ απλοποιείται με το 5.		
(β) Το κλάσμα $\frac{3}{5}$ είναι ανάγωγο.		
(γ) Αν το κλάσμα $\frac{x}{8}$ τραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή 24, ο αριθμητής του θα είναι διπλάσιος του x.		
(δ) Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος επί 4, το κλάσμα θα γίνει 4 φορές μεγαλύτερο.		
(ε) Το κλάσμα $\frac{18}{522}$ απλοποιείται με το 6.		
(στ) Ένα ανάγωγο κλάσμα είναι πάντα μικρότερο του 1.		
(ζ) $\frac{0}{4} = \frac{0}{10}$.		
(η) $\frac{23}{30} = \frac{20+3}{20+10} = \frac{3}{10}$.		
(θ) $\frac{3}{11} = \frac{60}{220}$.		
(ι) $\frac{5}{5} = \frac{41}{41}$.		
(ια) Το κλάσμα $\frac{α+β}{1}$ είναι πάντα ίσο με α + β.		

Α.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου καταλαμβάνει κάθε χρώμα, στο διπλανό σχήμα; Η Μαρία είπε πως το ροζ χρώμα καταλαμβάνει τα $\frac{9}{48}$, το γαλάζιο τα $\frac{10}{48}$ και το πράσινο τα $\frac{7}{48}$.



Ενώ ο Γιάννης είπε ότι το ροζ είναι τα $\frac{3}{16}$, το γαλάζιο τα $\frac{5}{24}$ και το πράσινο το $\frac{1}{8}$ του τετραγώνου.

- *Ποιος έχει δίκιο και ποιος όχι;*
- *Προσπάθησε να γράψεις σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα που αντιστοιχούν σε καθένα από τα μέρη του τετραγώνου.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται πώς κατανέμονται οι ώρες ενός 24ώρου από ένα μαθητή, της Α' Γυμνασίου.

- *Τι μέρος του χρόνου του είναι κάθε δραστηριότητα;*
- *Πόσο χρόνο διαρκεί κάθε δραστηριότητα;*
- *Σε ποια δραστηριότητα δαπανά τον περισσότερο χρόνο;*
- *Γράψε σε μια σειρά τους χρόνους που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο και καταλήγοντας στο μικρότερο χρόνο.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι το 24ωρο είναι χωρισμένο σε 12 κομμάτια, από τα οποία τα 4 αντιστοιχούν στον ύπνο, τα 3 στο σχολικό ωράριο, τα 2 στο διάβασμα, το 1 στον αθλητισμό και τα 2 στο παιχνίδι. Επομένως, το μέρος που αφιερώνεται για ύπνο είναι τα $\frac{4}{12}$ του συνολικού χρόνου, για το σχολείο τα $\frac{3}{12}$, για το διάβασμα τα $\frac{2}{12}$, για τον αθλητισμό το $\frac{1}{12}$ και για το παιχνίδι τα $\frac{2}{12}$

Επειδή κάθε κομμάτι αντιστοιχεί σε δύο ώρες, συμπεραίνουμε ότι ό χρόνος που αφιερώνεται για κάθε δραστηριότητα είναι: 8 ώρες για ύπνο, 6 ώρες για το σχολείο, 4 ώρες για διάβασμα, 2 ώρες για αθλητισμό και 4 ώρες για παιχνίδι.

Άρα, η ζητούμενη χρονική σειρά των διαφόρων δραστηριοτήτων είναι:

8 ώρες(Ύπνος) > 6 ώρες(Σχολείο) > 4 ώρες (Διάβασμα) = 4 ώρες (Παιχνίδι) > 2 ώρες (Αθλητισμός).

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

- Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

$\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$

- Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

Για να συγκρίνω τα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$ τα μετατρέπω σε ομώνυμα:

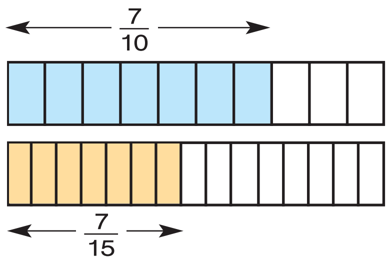
$\frac{7}{12} = \frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16} = \frac{15}{48}$ Άρα: $\frac{7}{12} > \frac{5}{16}$

- Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

$\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{7}{10}$ και $\frac{7}{15}$.*



Λύση

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι “σε όσα περισσότερα μέρη χωρίζεται ένα συγκεκριμένο μέγεθος, τόσο μικρότερα είναι τα μέρη αυτά”.

Δηλαδή: $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$ και $\frac{7}{15} < \frac{7}{10}$.

2. *Να συγκριθούν τα κλάσματα: $\frac{5}{8}$ και $\frac{4}{9}$.*

Λύση

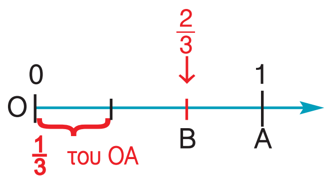
Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. ΕΚΠ(8, 9)=72, επομένως

$72 : 8 = 9$ και $72 : 9 = 8$ οπότε $\frac{\overset{9}{5}}{8} = \frac{45}{72}$ και $\frac{\overset{8}{4}}{9} = \frac{32}{72}$. Άρα $\frac{5}{8} > \frac{4}{9}$.

3. *Να τοποθετηθούν στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα: (α) $\frac{2}{3}$ και (β) $\frac{8}{5}$.*

Λύση

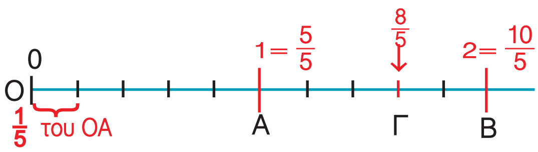
(α) Για το κλάσμα $\frac{2}{3}$ γνωρίζουμε ότι: $0 < \frac{2}{3} < \frac{3}{3} = 1$. Δηλαδή βρίσκεται μεταξύ των φυσικών αριθμών 0 και 1. Επειδή ο παρονομαστής είναι ο αριθμός 3, η απόσταση των φυσικών 0 και 1 πρέπει να χωριστεί σε 3 ίσα μέρη. Το σημείο Β απέχει από το Ο απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ του ΟΑ. Έτσι, το $\frac{2}{3}$ τοποθετείται στο σημείο Β.



(β) Για το κλάσμα $\frac{8}{5}$ έχουμε ότι: $1 = \frac{5}{5} < \frac{8}{5} < \frac{10}{5} = 2$.

Καθένα, από τα τμήματα ΟΑ και ΑΒ του σχήματος είναι ίσο με τη μονάδα. Τα χωρίζουμε σε 5 ίσα τμήματα, ώστε το καθένα να είναι ίσο με το $\frac{1}{5}$ της μονάδας.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ αποτελείται από 8 ίσα τμήματα ίσα με το $\frac{1}{5}$ της μονάδας το καθένα. Το μήκος ΟΓ είναι $\frac{8}{5}$ του ΟΑ. Άρα το κλάσμα $\frac{8}{5}$ τοποθετείται στο σημείο Γ.



4. *Να βρεθεί ένα κλάσμα μεγαλύτερο από το $\frac{2}{5}$ και μικρότερο από τα $\frac{3}{5}$.*

Λύση

Τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$ είναι ομώνυμα και ανάμεσα στους αριθμητές του 2 και 3 δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός. Μπορούμε, όμως, να βρούμε ισοδύναμα κλάσματα με αυτά π.χ. τα $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, για τα οποία μεταξύ των αριθμητών τους 4 και 6 υπάρχει ο αριθμός 5.

Επομένως, αφού το κλάσμα $\frac{5}{10}$ είναι μεταξύ των $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, θα είναι και $\frac{2}{5} < \frac{5}{10} < \frac{3}{5}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Για να συγκρίνουμε δύο κλάσματα πρέπει αυτά να είναι ....

(β) Ένα κλάσμα είναι:

(i) ίσο με 1, αν ο αριθμητής του είναι ....τον παρονομαστή.

(ii) μικρότερο του 1, αν ο αριθμητής του είναι .... τον παρονομαστή.

(iii) μεγαλύτερο του 1, αν ο αριθμητής του είναι .... τον παρονομαστή.

(γ) Αν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ *τότε ....*

2. *Σύγκρινε τα κλάσματα:(α)* $\frac{3}{7}$ *και* $\frac{5}{7}$, *(β)* $\frac{3}{5}$ *και* $\frac{3}{9}$, *(γ)* $\frac{4}{5}$ *και* $\frac{8}{12}$.

3. *Γράψε τα κλάσματα* $\frac{31}{10}, \frac{31}{14}, \frac{31}{11}, \frac{31}{13}, \frac{31}{12}$ *σε φθίνουσα σειρά.*

4. *Σύγκρινε με το 1 τα κλάσματα: (α)* $\frac{5}{8}$, *(β)* $\frac{9}{10}$, *(γ)* $\frac{12}{11}$, *(δ)* $\frac{16}{16}$, *(ε)* $\frac{109}{120}$.

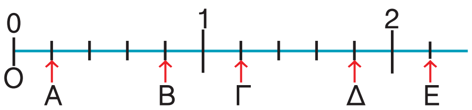
5. *Βάλε σε σειρά τα κλάσματα:* $\frac{3}{5}, \frac{8}{15}, \frac{5}{10}, \frac{20}{15}, \frac{7}{5}$.

6. *Βρες μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται καθένα από τα παρακάτω κλάσματα (α)* $\frac{5}{3}$, *(β)* $\frac{7}{2}$, *(γ)* $\frac{8}{9}$, *(δ)* $\frac{63}{5}$, *(ε)* $\frac{125}{10}$.

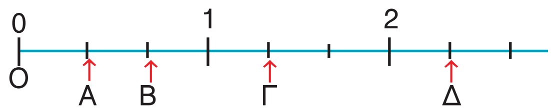
7. *Τοποθέτησε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα:*
(α) $\frac{1}{2}$, *(β)* $\frac{3}{2}$, *(γ)* $\frac{5}{2}$, *(δ)* $\frac{1}{4}$, *(ε)* $\frac{3}{4}$, *(στ)* $\frac{4}{5}$, *(ζ)* $\frac{9}{10}$.

8. *Ποιοι κλασματικοί αριθμοί πρέπει να τοποθετηθούν στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του σχήματος:*

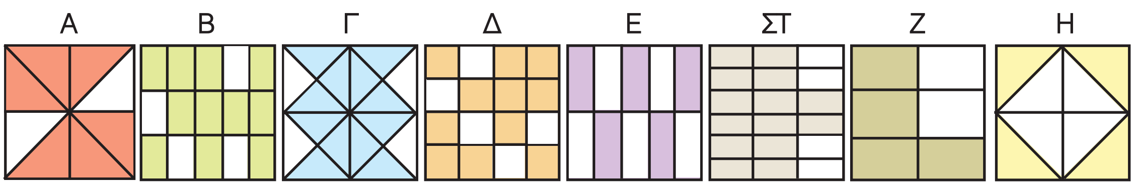
(α)



(β)



9. *Συμπλήρωσε τις κενές θέσεις του πίνακα με το κλάσμα που αντιστοιχεί στο χρωματισμένο τμήμα του τετραγώνου με το αντίστοιχο γράμμα και μετά βάλε τα κλάσματα που βρήκες σε φθίνουσα σειρά.*



Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Ζ	Η

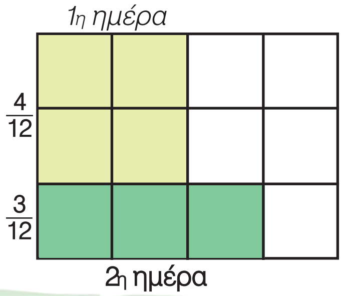
Α.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Το συνεργείο του Δήμου φύτεψε σε μια μέρα τα $\frac{4}{12}$ μιας πλατείας πλατείας με λουλούδια. Την επόμενη ημέρα που ο καιρός δεν ήταν καλός φύτεψε μόνο τα $\frac{3}{12}$ της πλατείας.

➢ *Ποιο τμήμα της πλατείας είχε φυτέψει, συνολικά, στο τέλος της δεύτερης ημέρας;*

Σκεφτόμαστε



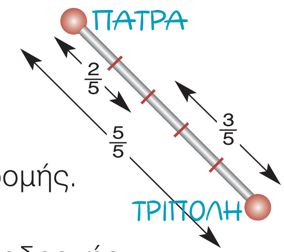
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι στο τέλος της δεύτερης ημέρας έχουν φυτευτεί, συνολικά, τα $\frac{7}{12}$ της πλατείας.

Πράγμα που σημαίνει ότι το άθροισμα $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}$ κάνει $\frac{7}{12}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ένα φορτηγό κάλυψε σε μία ώρα τα $\frac{2}{5}$ της διαδρομής Πάτρα - Τρίπολη.

➢ *Ποιο μέρος της διαδρομής του μένει να καλύψει ακόμη;*

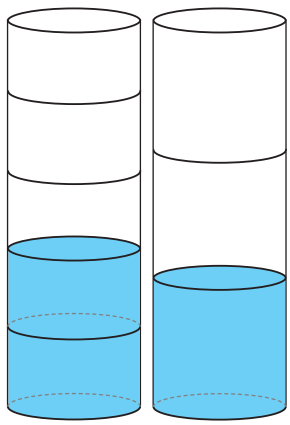


Σκεφτόμαστε

Όπως φαίνεται στο σχήμα δεν έχουν καλυφθεί τα $\frac{3}{5}$ της διαδρομής.

Επομένως, η διαφορά $\frac{5}{5}-\frac{2}{5}$ κάνει τα $\frac{3}{5}$ του συνόλου της διαδρομής.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η



Μια βρύση γεμίζει, σε 1 ώρα, τα $\frac{2}{5}$ της δεξαμενής. Μια άλλη βρύση γεμίζει το $\frac{1}{3}$ της ίδιας δεξαμενής, επίσης σε 1 ώρα. Αν και οι δύο βρύσες τρέχουν ταυτόχρονα μέσα στη δεξαμενή, τι μέρος της δεξαμενής θα γεμίσουν σε 1 ώρα;

Σκεφτόμαστε

Αν οι βρύσες "τρέχουν" ταυτόχρονα στη δεξαμενή για 1 ώρα θα έχουν γεμίσει ένα τμήμα της που αντιστοιχεί στο άθροισμα των τμημάτων αυτής που η κάθε μία γεμίζει ξεχωριστά. Δηλαδή το ...

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

▶ Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7+2}{5}=\frac{9}{5}$$

- Προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα. $\frac{7}{4}+\frac{2}{3}=\frac{21}{12}+\frac{8}{12}=\frac{29}{12}$

- Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους. $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$ $\quad \frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}$

- Αφαιρούμε δύο ετερώνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα. $\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{21}{12}-\frac{8}{12}=\frac{13}{12}$

- Μερικές φορές αντί να γράφουμε $1+\frac{4}{5}$, γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$.
- Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογισθεί το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+3$.*

Λύση

Μετατρέπουμε το φυσικό αριθμό σε κλάσμα με παρονομαστή 4.

Είναι: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+3=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3\cdot 4}{4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{12}{4}=\frac{15}{4}$.

2. *Να αποδειχθεί ότι: (α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1$ και (β) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$.*

Λύση

(α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1$ $\qquad$ (β) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$

3. *Να υπολογισθεί η διαφορά και το άθροισμα των κλασμάτων $\frac{3}{12}$ και $\frac{7}{20}$.*

Λύση

Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα και πρέπει πρώτα να μετατρραπούν σε ισοδύναμα ομώνυμα. Έχουμε: ΕΚΠ(12, 20) = 60 οπότε: $60:12=5$ και $60:20=3$

Άρα: $\overset{5)}{\frac{3}{12}}=\frac{3\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{15}{60}$ και $\overset{3)}{\frac{7}{20}}=\frac{7\cdot 3}{20\cdot 3}=\frac{21}{60}$. Επειδή $\frac{21}{60}>\frac{15}{60}$ μπορεί να υπολογιστεί

η διαφορά: $\frac{7}{20}-\frac{3}{12}=\frac{21}{60}-\frac{15}{60}=\frac{21-15}{60}=\frac{6}{60}=\frac{6:6}{60:6}=\frac{1}{10}$

και $\frac{7}{20}+\frac{3}{12}=\frac{21}{60}+\frac{15}{60}=\frac{21+15}{60}=\frac{36}{60}=\frac{36:12}{60:12}=\frac{3}{5}$

4. *Να βρεθεί η διαφορά: $\frac{15}{4}-1$ και το αποτέλεσμα να γίνει μεικτός.*

Λύση

$\frac{15}{4}-1=\frac{15}{4}-\frac{4}{4}=\frac{15-4}{4}=\frac{11}{4}$. Για να τρέψουμε το αποτέλεσμα σε μεικτό αριθμό εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση: $11=4\cdot 2+3$ και έχουμε:

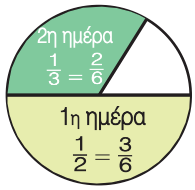
$\frac{11}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{2\cdot 4}{4}+\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$.

5. *Να βρεθεί το άθροισμα: $2 + 1\frac{1}{3}$.*

Λύση

$$2+1\frac{1}{3}=2+1+\frac{1}{3}=\frac{2}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3}{3}+\frac{1\cdot 3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6+3+1}{3}=\frac{10}{3}.$$

6. *Την πρώτη ημέρα ένας κηπουρός κούρεψε το γκαζόν στο $\frac{1}{2}$ μιας στρογγυλής πλατείας. Την δεύτερη ημέρα, εξαιτίας μιας δυνατής βροχής, κατάφερε να κουρέψει μόνο το $\frac{1}{3}$.*



Λύση

Για να βρούμε το μέρος της πλατείας που κουρεύτηκε, στο τέλος της δεύτερης ημέρας, δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{3}$. Αλλά, για να εκτελέσουμε αυτή την πρόσθεση πρέπει να μετατρέψουμε τα δύο κλάσματα σε ομώνυμα. Άρα, θα έχουμε: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. Για να βρούμε ποιο κλάσμα της πλατείας έχει απομείνει για κούρεμα, πρέπει να αφαιρέσουμε από το όλο μέρος, δηλαδή: $\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}$, (β) $\frac{11}{13}+\frac{2}{13}$, (γ) $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$ (δ) $\frac{8}{12}+\frac{2}{3}$, (ε) $\frac{17}{20}+\frac{3}{15}$, (στ) $\frac{15}{12}+\frac{5}{4}$, και απλοποίησε το τελικό αποτέλεσμα, αν δεν είναι ανάγωγο κλάσμα.*

2. *Να βρεις τις διαφορές και να απλοποιήσεις το αποτέλεσμα, όπου αυτό δεν είναι ανάγωγο κλάσμα: (α) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$, (β) $\frac{8}{9}-\frac{3}{9}$, (γ) $\frac{10}{8}-\frac{3}{4}$, (δ) $\frac{4}{9}-\frac{2}{27}$, (ε) $\frac{7}{3}-\frac{5}{8}$, (στ) $\frac{3}{7}-\frac{3}{11}$.*

3. *Να μετατρέψεις τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα: (α) $3\frac{5}{8}$, (β) $4\frac{1}{10}$, (γ) $2\frac{1}{9}$*

4. *Κάνε τα ακόλουθα κλάσματα μεικτούς αριθμούς: (α) $\frac{15}{4}$, (β) $\frac{5}{2}$, (γ) $\frac{38}{12}$.*

5. *Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{3}{8}+2$, (β) $\frac{12}{15}+1$, (γ) $\frac{16}{20}+\frac{3}{10}+5$.*

6. *Να βρεις τις διαφορές: (α) $3-2\frac{1}{5}$, (β) $4\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}$, (γ) $1\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$.*

7. *Τρία αδέλφια μοίρασαν 20.000 €. Ο πρώτος πήρε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, ο δεύτερος $\frac{1}{8}$ λιγότερα από τον πρώτο και ο τρίτος τα υπόλοιπα. Ποιο μέρος του ποσού πήρε ο καθένας και πόσα χρήματα είναι το μέρος του ποσού για κάθε αδελφό;*

8. *Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{3}{8}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{5}{9}$;*

9. *Ένας αγρότης πούλησε σε τέσσερις εμπόρους τα $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{10}$ της παραγωγής του. Ποιο μέρος της παραγωγής του έμεινε απούλητο;*

10. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$		
(β)	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{20}{12}$		
(γ)	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$		
(δ)	$\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}$		

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$		
(στ)	$\frac{3+5}{5}=\frac{3}{5}+1$		
(ζ)	$\frac{8-3}{8}=1-\frac{3}{8}$		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

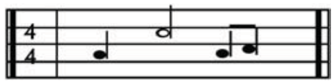
1. Αντιστοίχισε σε κάθε πρόσθεση το σωστό αποτέλεσμα:

$\frac{8}{10}+\frac{4}{10}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$	2
$\frac{45}{90}+\frac{19}{90}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{16}{12}+\frac{8}{12}$	$\frac{5}{5}$

2. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

+	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{5}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{3}{2}$				
1				
$\frac{3}{5}$				

ΝΟΤΕΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ



Ανάμεσα στα κοινά στοιχεία όλων των ανθρωπίνων πολιτισμών είναι η δυνατότητα αρίθμησης και μουσικής έκφρασης.

- Ο άνθρωπος δημιουργεί μουσική, ήδη, από τους προϊστορικούς χρόνους, αφού το αρχαιότερο σχετικό εύρημα, που έχει ηλικία 35.000 χρόνων, είναι οστά από μαμούθ τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή ρυθμικών ήχων.
- Οι μελέτες έχουν δείξει, ότι η έννοια του αριθμού εμφανίζεται στον άνθρωπο από τα πρώτα του βήματα. Διαπιστώθηκε ότι αυτή η πρώιμη ικανότητα αρίθμησης σχετίζεται με την ικανότητα της κατάτμησης του χρόνου, που δημιουργεί η αντιστοιχία γεγονότων και χρονικών στιγμών και μάλιστα χωρίς, τη χρήση της έννοιας του αριθμού.
  Εξάλλου η αρίθμηση είναι μια πολιτιστική αναγκαιότητα, ένα καθολικό στοιχείο πολιτισμού.

Η συνάντηση της Μουσικής με τα Μαθηματικά πραγματοποιείται μέσα από την αίσθηση, που έχουμε για τον χρόνο και εντοπίζεται σε δύο βασικούς άξονες κάθε μουσικής έκφρασης, το Ρυθμό και την Αρμονία.
Ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να εντοπίζει και να απομονώνει τις χρονικές στιγμές. Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο στιγμών, δημιουργεί την αίσθηση της διάρκειας. Ο χωρισμός του χρόνου από τα γεγονότα δημιουργεί ένα πυκνό σύνολο από στιγμές. Έτσι, ο ρυθμός και ο αριθμός έχουν κοινή καταγωγή, το χωρισμό του χρόνου σε στιγμές και την αντιστοίχιση των χρονικών στιγμών με γεγονότα. Ο ρυθμός είναι από τις πρώτες μουσικές ανθρώπινες κατακτήσεις, όπως ακριβώς ο αριθμός είναι από τις πρώτες θεμελιώδεις Μαθηματικές ανθρώπινες επινοήσεις. Ο ρυθμός, λοιπόν, είναι το πρώτο είδος μουσικής που δημιούργησε ο άνθρωπος. Το μουσικό μέτρο, το οποίο είναι απαραίτητο για την εκτέλεση ενός μουσικού θέματος, δηλώνεται με ένα κλάσμα που καθορίζει το ρυθμό. Σήμερα οι δύο αυτές έννοιες, του ρυθμού και του αριθμού - κλάσματος, συνυπάρχουν στον τρόπο με τον οποίο γράφεται η Δυτική Μουσική. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Στο σχήμα φαίνεται ένα μέρος ενός μουσικού κομματιού. Η χρονική αξία του πρώτου και δεύτερου συμβόλουείναι $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, ενώ κάθε ένα από τα σύμβολα (νότες), που είναι ενωμένα έχουν εξ ορισμού αξία $\frac{1}{8}$. Το κλάσμα $\frac{4}{4}$ στην αρχή καθορίζει πως κάθε μέτρο, κάθε διάστημα δηλαδή, το οποίο περιέχει μια μουσική φράση, πρέπει να περιέχει σύμβολα (νότες) συνολικής αξίας $\frac{4}{4}$. Πράγματι $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{4}$. Με αυτόν τον τρόπο ο αριθμός - κλάσμα καθορίζει το ρυθμό και επιτρέπει να εκτελείται ένα μουσικό κομμάτι συγχρονισμένα από τους μουσικούς.

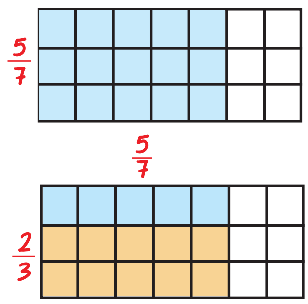
ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- Βρες παρτιτούρες από τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και γράψε τα κλάσματα,που αντιστοιχούν στους ρυθμούς των τραγουδιών αυτών.
- Αναζήτησε και βρες ορισμένα χαρακτηριστικά τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και προσπάθησε να συσχετίσεις τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς αυτούς, με την ονομασία του εκάστοτε συγκεκριμένου ρυθμού.

Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας πεζόδρομος στρώθηκε με πλάκες. Τα $\frac{5}{7}$ από τις πλάκες είναι χρωματιστές. Από αυτές τα $\frac{2}{3}$ είναι κόκκινες.



- *Ποιο είναι το μέρος όλου του πεζόδρομου που καταλαμβάνουν οι κόκκινες πλάκες;*

Σκεφτόμαστε

Ο πεζόδρομος έχει συνολικά *21* πλάκες, επομένως τα $\frac{5}{7}$ αυτού είναι *15* πλάκες. Από αυτές τα $\frac{2}{3}$, δηλαδή οι *10* είναι κόκκινες. Άρα οι κόκκινες είναι τα $\frac{10}{21}$ του συνόλου. Παρατηρούμε, όμως, ότι οι κόκκινες πλάκες είναι τα $\frac{2}{3}$ των $\frac{5}{7}$ του συνόλου.

Συνεπώς, θα έχουμε ότι $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ είναι $\frac{10}{21}$, δηλαδή: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}$.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο κανόνα:

- Το γινόμενο **δύο κλασμάτων είναι το** κλάσμα που έχει αριθμητή το **γινόμενο των αριθμητών** και παρονομαστή το **γινόμενο των παρονομαστών**.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \qquad \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$$

- Το γινόμενο ενός **φυσικού αριθμού** επί ένα **κλάσμα** είναι το κλάσμα με αριθμητή το **γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό** και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lambda = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\beta} \qquad 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5}$$

- Τα κλάσματα που έχουν **γινόμενο 1** λέγονται **αντίστροφα**.
  Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = 1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι **αντίστροφα**.

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{35}{35} = 1$$

- **Ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών στα κλάσματα.**

- Το 1 δε μεταβάλλει το γινόμενο

$$1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta} \qquad 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

- Αντιμεταθετική

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$$

- Προσεταιριστική

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \qquad \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{11}{13}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{11}{13}$$

- Επιμεριστική

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\zeta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \qquad \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} + \frac{11}{13}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{13}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\zeta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \qquad \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{11}{13}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} - \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{13}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το γινόμενο: $\frac{3}{7} \cdot \frac{70}{6} \cdot \frac{8}{5}$

Λύση

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{70}{6} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3 \cdot 70 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 560}{7 \cdot 30} = \frac{1680}{210} = 8$$

2. Σε ένα σχολείο με 252 μαθητές, τα $\frac{5}{9}$ είναι αγόρια. Να βρεις πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το σχολείο.

Λύση

Αφού τα αγόρια είναι τα $\frac{5}{9}$ των μαθητών, θα είναι: $\frac{5}{9} \cdot 252 = \frac{5 \cdot 252}{9} = \frac{1260}{9} = 140.$

Επομένως, τα κορίτσια θα είναι: $252 - 140 = 112.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα ....

....

(β) Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν ....

(γ) Ο αντίστροφος του αριθμού κ είναι ο ....., του $\frac{1}{\kappa}$ είναι ο ..... και του $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ο .....

(δ) Μόνο ο αριθμός ..... ισούται με τον αντίστροφό του.

2. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $3 \cdot \frac{3}{4}$, (β) $7 \cdot \frac{10}{14}$, (γ) $\frac{4}{2} \cdot 2$, (δ) $\frac{5}{100} \cdot 10$.

3. Βρες τα γινόμενα: (α) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8}$, (β) $\frac{8}{10} \cdot \frac{100}{5}$, (γ) $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9}$, (δ) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15}$.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

•	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{5}$				
$\frac{2}{3}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

5. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{21}$, (β) $4\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$, (γ) $3\frac{1}{8} \cdot 10$, (δ) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

6. Να βρεις τους αντίστροφους των αριθμών: (α) $\frac{4}{7}$, (β) 72, (γ) $\frac{5}{8}$, (δ) $\frac{1}{3}$, (ε) $\frac{739}{8}$, (στ) 1.

7. Ο Κώστας ήπιε τα $\frac{2}{3}$ από ένα μπουκάλι, που περιείχε αναψυκτικό όγκου $1\frac{1}{2}$ του λίτρου. Πόσα λίτρα αναψυκτικού ήπιε;

8. Υπολόγισε τα εξαγόμενα των πράξεων: (α) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$, (β) $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$, (γ) $\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$

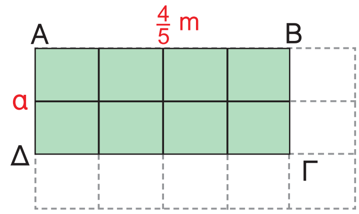
9. Όμοια: (α) $\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$, (β) $\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$, (δ) $\frac{7}{3} - \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{8}$.

Α.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\frac{8}{15}$ m^2.

- *Προσπάθησε να επεκτείνεις το ορθογώνιο ώστε το συνολικό έμβαδο που θα προκύψει να είναι $\frac{15}{15}$ m^2, δηλαδή $1m^2$.*
- *Βρες το πλάτος α του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.*



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$α:β=α\cdot\frac{1}{β}=\frac{α}{β}$$

$$5:4=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

- Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{α}{β}:\frac{γ}{δ}=\frac{α}{β}\cdot\frac{δ}{γ}$$

$$\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot4}{3\cdot5}=\frac{28}{15}$$

- Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται **σύνθετο κλάσμα**.

Μετατροπή σύνθετου σε απλό

$$\frac{\frac{α}{β}}{\frac{γ}{δ}}=\frac{α\cdot δ}{β\cdot γ}$$

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{15}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα: (α) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}$, (β) $\frac{4}{\frac{9}{8}}$, (γ) $\frac{\frac{7}{10}}{5}$.*

Λύση

(α) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}=\frac{2\cdot9}{3\cdot10}=\frac{2\cdot3\cdot3}{3\cdot2\cdot5}=\frac{3}{5}$, (β) $\frac{4}{\frac{9}{8}}=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{9}{8}}=\frac{4\cdot8}{1\cdot9}=\frac{32}{9}=3\frac{5}{9}$, (γ) $\frac{\frac{7}{10}}{5}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{5}{1}}=\frac{7\cdot1}{10\cdot5}=\frac{7}{50}$

2. *Να εκτελεστούν οι πράξεις: $\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{4}{6}}$*

Λύση

$$\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{4}{6}}=\frac{\frac{3}{10}+\frac{5}{10}}{\frac{8}{6}-\frac{4}{6}}=\frac{\frac{8}{10}}{\frac{4}{6}}=\frac{8\cdot6}{4\cdot10}=\frac{48}{40}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα ....

(β) Σύνθετο κλάσμα λέγεται το κλάσμα, του οποίου ....

2. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, (β) $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$, (γ) $\frac{10}{100} : \frac{1}{5}$, (δ) $\frac{7}{3} : \frac{21}{27}$.

3. Να βρεις τα πηλίκα: (α) $2 : \frac{1}{3}$, (β) $\frac{5}{8} : 1$, (γ) $2\frac{1}{2} : 4$, (δ) $4\frac{1}{10} : 3\frac{1}{3}$.

4. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ (β) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, (γ) $\frac{20}{6} : 10$ (δ) $10 : \frac{20}{6}$.
Τι παρατηρείς;

5. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{1}{8} : \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right)$ και (β) $\left(\frac{1}{8} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2}$. Τι παρατηρείς;

6. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

:	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{1}{2}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

7. Αντιστοίχισε σε κάθε διαίρεση το σωστό αποτέλεσμα:

$\frac{3}{10} : \frac{4}{10}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$	6
$\frac{45}{90} : \frac{15}{9}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{16}{3} : \frac{8}{9}$	$\frac{3}{10}$

8. Να μετατρέψεις τα σύνθετα κλάσματα σε απλά: (α) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}}$, (β) $\dfrac{\frac{15}{3}}{4}$, (γ) $\dfrac{20}{\frac{5}{4}}$.

9. Κάνε τις πράξεις και απλοποίησε τα κλάσματα:

(α) $\dfrac{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}}$, (β) $\dfrac{\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{8}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}}$, (γ) $\dfrac{\frac{2}{3} : \frac{4}{3}}{\frac{1}{8} : 2}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Στον πάπυρο του Ριντ, βρήκαμε πως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν τα $\frac{2}{3}$ ενός οποιουδήποτε κλάσματος με αριθμητή το 1 και παρονομαστή έναν περιττό αριθμό.
Για παράδειγμα, τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{7}$ θα είναι: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

- Μπορείς να βρεις ποιό κανόνα χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι;
- Εφάρμοσε τον κανόνα αυτό και βρες τα $\frac{2}{3}$ των κλασμάτων $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$ και στη συνέχεια επαλήθευσε τα αποτελέσματα που βρήκες.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Σε αρχαία βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα που χρονολογούνται από το 2100 π.Χ. περίπου, συναντάμε εξηκονταδικά κλάσματα με παρονομαστή δύναμη του 60, για τα οποία υπήρχαν ειδικά σφηνοειδή σύμβολα.

Οι **Βαβυλώνιοι** *είχαν επίσης ειδικά σύμβολα για τα κλάσματα* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{3}$.

Οι **Αιγύπτιοι**, *επίσης, γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τα λεγόμενα θεμελιώδη ή αιγυπτιακά κλάσματα, δηλαδή κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα (κλασματικές μονάδες στη δική μας ορολογία). Ένα θεμελιώδες κλάσμα συμβολίζεται με τον παρανομαστή του, πάνω στον οποίο υπάρχει ένα διακριτικό σημείο, π.χ. το* $\frac{1}{5}$ *γράφεται ως* $\overline{5}$

Όμως είχαν ειδικό συμβολισμό για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{3}$.

Αυτή η ιδιομορφία του συμβολισμού οφείλεται στη διαφορετική προέλευση των κλασμάτων αυτών. Τα κλάσματα αυτά έλκουν την καταγωγή τους από άμεσα πρακτικά προβλήματα, ενώ τα θεμελιώδη κλάσματα πρέπει να ήταν προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας. Όλα τα κλάσματα που χρησιμοποιούν ανάγονται σε αθροίσματα θεμελιωδών κλασμάτων. Η αναγωγή αυτή γινόταν με τη βοήθεια ειδικών πινάκων. Ένας τέτοιος πίνακας υπάρχει στον **πάπυρο του Ριντ** *(Rhind), μαθηματικό έργο των Αιγυπτίων, που τοποθετείται τουλάχιστον το 1650 π.Χ.*

Ο πίνακας περιέχει την ανάλυση όλων των κλασμάτων της μορφής $\frac{2}{\nu}$ *με "ν" περιττό αριθμό από 5 έως 101.*

$\nu=5 \qquad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\overline{3}+\overline{15}$

$\nu=7 \qquad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\overline{4}+\overline{28}$

$\nu=9 \qquad \frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\overline{6}+\overline{18}$

$\nu=59 \qquad \frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}=\overline{36}+\overline{236}+\overline{531}$

$\nu=97 \qquad \frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}=\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$

Αλλά και στον πάπυρο της Μόσχας, *που τοποθετείται στα 1850 π.Χ., υπάρχουν προβλήματα που περιέχουν κλάσματα και πράξεις με κλάσματα και αριθμούς, όπως για παράδειγμα "το $\frac{1}{3}$ του 6 είναι 2", που αναφέρεται σε υπολογισμό του όγκου δεδομένης κόλουρης πυραμίδας.*

Οι Έλληνες *μαθηματικοί δεν ανέπτυξαν κάποιο νέο σύστημα γραφής των κλασμάτων. Χρησιμοποιούσαν τα θεμελιώδη κλάσματα των Αιγυπτίων και τα εξηκονταδικά των Βαβυλωνίων, σε υπολογιστικά προβλήματα στα μαθηματικά και την αστρονομία. Στους "άβακες" των Ρωμαίων και των Ελλήνων (τα γνωστά αριθμητάρια των πρώτων χρόνων του δημοτικού), βρίσκουμε ειδική στήλη για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$.*

Οι Ινδοί *μαθηματικοί, επίσης, γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα και τις πράξεις τους από πολύ παλιά. Στα έργα "Σουλβασούτρα", μερικά από τα οποία ανάγονται στο 500 π.Χ. ή και παλαιότερα, χρησιμοποιούνται τα θεμελιώδη κλάσματα στον προσεγγιστικό υπολογισμό όγκων ή εμβαδών. Αλλά , όταν δημιούργησαν το δεκαδικό Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης, άρχισαν να χρησιμοποιούν και κλάσματα με μορφή πολύ κοντινή στη δική μας. Έγραφαν τον αριθμητή πάνω από τον παρονομαστή, αλλά, χωρίς την κλασματική γραμμή, για παράδειγμα $\begin{matrix}5\\6\end{matrix}$ αντί $\frac{5}{6}$. Τα κλάσματα ξεχώριζαν το ένα από το άλλο με οριζόντιες και κάθετες γραμμές.*

Έτσι, π.χ. το κλάσμα $\frac{3}{5}$ γραφόταν $\left|\begin{matrix}\overline{3}\\ \underline{5}\end{matrix}\right|$.

Η πρόσθεση *συμβολιζόταν με την παράθεση των κλασμάτων το ένα δίπλα στο άλλο.*

Για την αφαίρεση *χρησιμοποιούσαν μία τελεία ή το σύμβολο "+" στα δεξιά,*

π.χ. η έκφραση $\frac{9}{12} - \frac{2}{15} - \frac{1}{5}$ γραφόταν: $\left|\begin{matrix}\overline{9}\\ \underline{12}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\dot{\overline{2}}\\ \underline{15}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\overline{1+}\\ \underline{5}\end{matrix}\right|$.

Στα μεικτά κλάσματα π.χ. $3\frac{1}{4}$, το ακέραιο μέρος γραφόταν πάνω από το κλάσμα: $\left|\begin{matrix}\overline{3}\\ 1\\ \underline{4}\end{matrix}\right|$.

Τα κλάσματα στους Κινέζους *εμφανίστηκαν σχεδόν μαζί με τους ακέραιους αριθμούς. Τα πρώτα κλάσματα, που χρησιμοποιούσαν, ήταν το $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.*

Στους κανόνες των αριθμητικών πράξεων στους Κινέζους, σε αντίθεση με τους άλλους λαούς, δεν υπήρχε τίποτα το ασυνήθιστο. Ήδη τον 2ο αιώνα π.Χ. οι Κινέζοι είχαν επεξεργαστεί, επαρκώς, όλες τις πράξεις με κλάσματα. Τον 3ο αιώνα μ.Χ. οι Κινέζοι, που χρησιμοποιούσαν, ήδη, το δεκαδικό σύστημα, άρχισαν στην ουσία, να χρησιμοποιούν δεκαδικά κλάσματα με μετρολογική μορφή.

Τα δεκαδικά κλάσματα εισάγονται στο έργο του Πέρση μαθηματικού Αλ-Κασί, ο οποίος εργαζόταν στο Αστεροσκοπείο της Σαμαρκάνδης. Αν και στο παρελθόν, υπήρξαν προσπάθειες στον Αραβικό κόσμο να εισαχθούν τα δεκαδικά κλάσματα, πρώτος ο Αλ-Κασί διατυπώνει τους βασικούς κανόνες των πράξεων και τους τρόπους μετατροπής των εξηκονταδικών κλασμάτων σε δεκαδικά και αντίστροφα.

Η είσοδος των κλασμάτων στα Ευρωπαϊκά μαθηματικά ανάγεται στον Λεονάρδο της Πίζας (1202), ενώ οι όροι "αριθμητής" και "παρονομαστής" απαντώνται στον Πλανούδη (τέλη 13ου αιώνα).

Ανακεφαλαίωση

ΚΛΑΣΜΑΤΑ $\frac{κ}{ν}$, όπου κ και ν φυσικοί αριθμοί, ν≠0

Ίσα ή ισοδύναμα: αν $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$ τότε $α\cdot δ=β\cdot γ$	$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ τότε: $2\cdot 15=3\cdot 10$
Ισχύει: $\frac{α}{β}=\frac{α\cdot γ}{β\cdot γ}$ και $\frac{α}{β}=\frac{α:δ}{β:δ}$	$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$ και $\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}$
$\frac{α}{β}$ *ανάγωγο* όταν ΜΚΔ(α,β)=1	$\frac{7}{12}$ *ανάγωγο* αφού ΜΚΔ(7, 12) = 1
ομώνυμα $\frac{α}{β},\frac{γ}{β}$ | *ετερώνυμα* $\frac{α}{β},\frac{γ}{δ}$	*ομώνυμα* $\frac{2}{7},\frac{5}{7}$ | *ετερώνυμα* $\frac{2}{3},\frac{5}{8}$
$\frac{α}{β}>\frac{γ}{β}$ όταν $α>γ$ και $\frac{β}{α}<\frac{β}{γ}$ όταν $α>γ$	$\frac{9}{13}>\frac{5}{13}$ αφού $9>5$ $\frac{7}{12}=\frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16}=\frac{15}{48}$. Επειδή $\frac{28}{48}>\frac{15}{48}$, άρα $\frac{7}{12}>\frac{5}{16}$ $\frac{13}{9}<\frac{13}{5}$ αφού $9>5$
Ο **Μεικτός** αποτελείται από έναν **ακέραιο** και ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας.	$1\frac{4}{5}=1+\frac{4}{5}=\frac{5}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$
$\frac{α}{β}$, $\frac{γ}{δ}$ είναι *αντίστροφα* όταν $\frac{α}{β}\cdot\frac{γ}{δ}=1$	$\frac{7}{5}\cdot\frac{10}{14}=\frac{7\cdot 10}{5\cdot 14}=\frac{70}{70}=1$

Πράξεις μεταξύ κλασμάτων

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$$\frac{α}{γ}+\frac{β}{γ}=\frac{α+β}{γ}$$

$$\frac{7}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7+2}{5}=\frac{9}{5} \quad και \quad \frac{7}{4}+\frac{2}{3}=\frac{21}{12}+\frac{8}{12}=\frac{29}{12}$$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

$$\frac{α}{γ}-\frac{β}{γ}=\frac{α-β}{γ}$$

$$\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{6-2}{5}=\frac{4}{5} \quad και \quad \frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{21}{12}-\frac{8}{12}=\frac{13}{12}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

$$\frac{α}{β}\cdot\frac{γ}{δ}=\frac{α\cdot γ}{β\cdot δ} \quad και$$

$$λ\cdot\frac{α}{β}=\frac{λ\cdot α}{β}$$

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 4}=\frac{15}{28} \quad και \quad 7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{5}=\frac{21}{5}$$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

$$α:β=α\cdot\frac{1}{β}=\frac{α}{β} \quad και$$

$$\frac{α}{β}:\frac{γ}{δ}=\frac{α}{β}\cdot\frac{δ}{γ}=\frac{α\cdot δ}{β\cdot γ}$$

$$5:4=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \quad και \quad \frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΕ ΑΠΛΟ

$$\frac{\frac{α}{β}}{\frac{γ}{δ}}=\frac{α\cdot δ}{β\cdot γ}$$

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$$