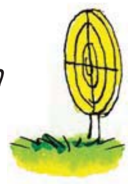
5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5.1 Σύνολα

- ✓ *Μαθαίνω την έννοια του συνόλου και πώς παριστάνεται ένα σύνολο.*
- ✓ *Κατανοώ πότε δύο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός συνόλου.*
- ✓ *Μαθαίνω να βρίσκω την ένωση ή την τομή δύο συνόλων καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στην οθόνη ενός υπολογιστή γράψαμε τις λέξεις **ελευθερία – ευτυχία**.

1. Ποια γράμματα πληκτρολογήσαμε για κάθε λέξη;
2. Ποια είναι τα φωνήεντα και ποια τα σύμφωνα κάθε λέξης;
3. Ποια είναι τα κοινά φωνήεντα των δύο λέξεων;
4. Ποια είναι τα κοινά σύμφωνα των δύο λέξεων;

Η έννοια του συνόλου

Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να συλλέγουμε ή να επιλέγουμε διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενό τους ταξινομούνται σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κ.τ.λ. Σε κατηγορίες επίσης, ταξινομούμε τους αριθμούς (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί, θετικοί, αρνητικοί κ.τ.λ.), τα γράμματα της αλφαβήτου (φωνήεντα, σύμφωνα, μικρά, κεφαλαία κ.τ.λ.) και κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Ομάδες ή κατηγορίες, όπως οι παραπάνω, ονομάζονται στα Μαθηματικά, **σύνολα**.

Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται **στοιχείο** του συνόλου.

Παράσταση συνόλου

Κάθε σύνολο συμβολίζεται μ' ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου (Α, Β, Γ, ...) και παριστάνεται με τους εξής τρόπους:

α) Με αναγραφή των στοιχείων του

Γράφουμε μία μόνο φορά καθένα από τα στοιχεία του και με οποιαδήποτε σειρά τα τοποθετούμε ανάμεσα σε δύο άγκιστρα. Π.χ. το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ελευθερία είναι $Α = \{ε, λ, υ, θ, ρ, ι, α\}$, το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 2004 είναι $Β = \{2, 0, 4\}$, κ.τ.λ.

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό για να παραστήσουμε και ένα σύνολο που έχει πολλά ή άπειρα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε μερικά στοιχεία του και για τα υπόλοιπα, που θα πρέπει να εννοούνται με σαφήνεια,

χρησιμοποιούμε αποσιωπητικά. Π.χ. το σύνολο των μικρών γραμμάτων της Ελληνικής αλφαβήτου είναι $Α = \{α, β, γ, ..., χ, ψ, ω\}$, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι $Ν = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
Στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε ότι το στοιχείο β **ανήκει** στο σύνολο Α, ενώ **δεν ανήκει** στο σύνολο Ν. Αυτό συμβολίζεται αντίστοιχα ως εξής:

$$β \in Α \quad \text{και} \quad β \notin Ν.$$

β) Με περιγραφή των στοιχείων του

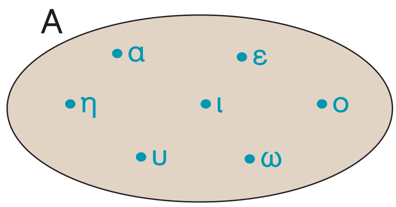
Το σύνολο $Α = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$, που έχει ως στοιχεία τους άρτιους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να το παραστήσουμε και ως εξής:

$Α = \{\text{άρτιοι φυσικοί αριθμοί}\}$ ή $Α = \{x \in Ν, \text{ όπου } x \text{ άρτιος αριθμός}\}$

Στην προηγούμενη περίπτωση λέμε ότι παριστάνουμε το σύνολο με περιγραφή των στοιχείων του.

γ) Με διάγραμμα Venn

Ένα σύνολο μπορούμε να το παραστήσουμε εποπτικά και με το εσωτερικό μιας κλειστής γραμμής. Π.χ. το σύνολο των φωνηέντων της Ελληνικής αλφαβήτου φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα, το οποίο ονομάζεται διάγραμμα Venn.



Ίσα σύνολα

Αν πάρουμε τα σύνολα $Α = \{α, ε, ι, υ\}$ και $Β = \{\text{φωνήεντα της λέξης ευτυχία}\}$, παρατηρούμε ότι το σύνολο Β με αναγραφή των στοιχείων του γράφεται $Β = \{ε, υ, ι, α\}$ και έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το σύνολο Α. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα σύνολα Α, Β είναι ίσα και γράφουμε $Α = Β$.

Γενικά

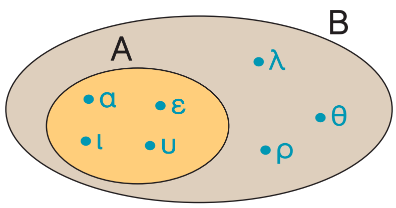
Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Υποσύνολο συνόλου

Αν πάρουμε τα σύνολα

$Α = \{α, ε, ι, υ\}$ και $Β = \{ε, λ, υ, θ, ρ, ι, α\}$,

παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β και το συμβολίζουμε $Α \subseteq Β$.

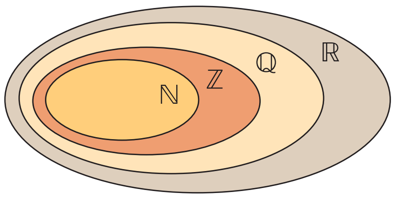


Γενικά

Ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Άμεσες συνέπειες του προηγούμενου ορισμού είναι και οι προτάσεις:
- Για κάθε σύνολο Α ισχύει $A \subseteq A$.
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

Οι γνωστοί μας αριθμοί και τα αντίστοιχα σύνολά τους συμβολίζονται ως εξής:



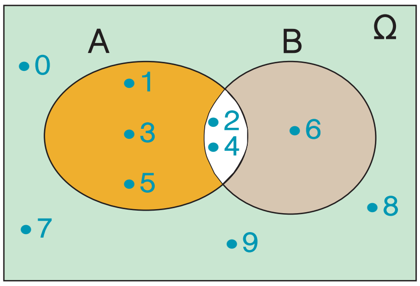
Είναι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{\alpha}{\beta}\text{, όπου α, β ακέραιοι, με } \beta \neq 0\right\}$

Πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R} = \{\text{ρητοί ή άρρητοι αριθμοί}\}$



Τα σύνολα με τα οποία ασχολούμαστε κάθε φορά είναι συνήθως υποσύνολα ενός ευρύτερου συνόλου, που ονομάζεται **βασικό σύνολο**. Αυτό παριστάνεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου και συμβολίζεται με Ω.
Π.χ. με βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ μπορούμε να δημιουργήσουμε διάφορα υποσύνολά του, όπως $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ κ.τ.λ.

Κενό σύνολο

Το σύνολο Α = {ημέρα της εβδομάδας που αρχίζει από Μ} δεν περιέχει κανένα στοιχείο, αφού δεν υπάρχει ημέρα της εβδομάδας που να αρχίζει από Μ. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο Α ονομάζεται **κενό** σύνολο και συμβολίζεται $\varnothing$.

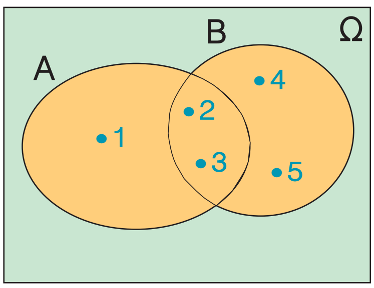
Γενικά

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\varnothing$.

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Πράξεις με σύνολα

α) Ένωση συνόλων



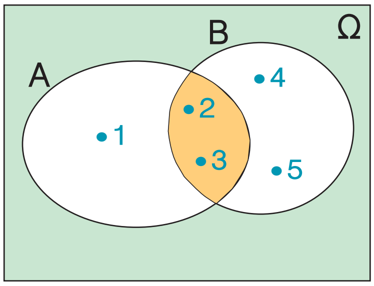
Αν πάρουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά και μη κοινά** στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **ένωση** των συνόλων Α και Β και συμβολίζεται $A \cup B$.
Άρα $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση δύο συνόλων Α, Β, αν ανήκει **στο σύνολο Α ή στο σύνολο Β**, δηλαδή αν ανήκει σ' ένα τουλάχιστον από αυτά.

β) Τομή συνόλων

Αν πάρουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά** στοιχεία των δύο συνόλων. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **τομή** των συνόλων Α, Β και συμβολίζεται $A \cap B$. Άρα

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

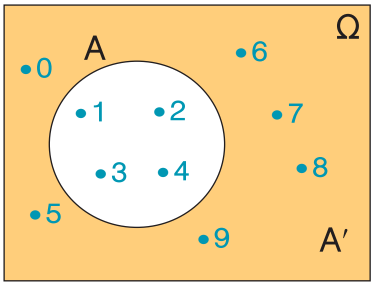


Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι ένα στοιχείο ανήκει στην τομή δύο συνόλων Α, Β, αν ανήκει **και στο σύνολο Α και στο σύνολο Β**.

γ) Συμπλήρωμα συνόλου

Αν πάρουμε το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και ως βασικό σύνολο Ω θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται **συμπλήρωμα** του Α ως προς το Ω και συμβολίζεται A'. Άρα

$$A' = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$



Όπως φαίνεται και από το προηγούμενο διάγραμμα Venn, ισχύουν:

$$A \cup A' = \Omega \quad \text{και} \quad A \cap A' = \varnothing$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:**
$A = \{x \in \mathbb{Z}$, όπου $-3 \leq x < 2\}$, $B = \{$περιττοί φυσικοί αριθμοί$\}$ και
$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}$, όπου $x^3 = x\}$.

Λύση

Τα στοιχεία του συνόλου Α είναι οι ακέραιοι αριθμοί x, για τους οποίους ισχύει $-3 \leq x < 2$, οπότε $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου Β είναι οι περιττοί φυσικοί αριθμοί, οπότε $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου Γ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^3 = x$ ή $x^3 - x = 0$ ή $x(x^2 - 1) = 0$ ή $x(x - 1)(x + 1) = 0$.

Άρα $x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 0$, οπότε $\Gamma = \{-1, 0, 1\}$.

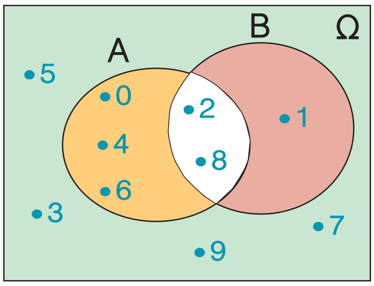
2 **Με βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ θεωρούμε τα σύνολα**
$A = \{x \in \Omega$, όπου x άρτιος$\}$ και $B = \{x \in \Omega$, όπου x ψηφίο του αριθμού 1821$\}$.

α) Να παρασταθούν τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους και να γίνει το διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιοριστούν τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A' και B'.
γ) Να επαληθευτεί ότι $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Λύση

α) Τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:
$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ και $B = \{1, 8, 2\}$.
Το διάγραμμα Venn φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Έχουμε ότι:
$A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 8\}$,
$A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ και $B' = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

γ) Επειδή $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, έχουμε ότι $(A \cup B)' = \{3, 5, 7, 9\}$. Επίσης $A' \cap B' = \{3, 5, 7, 9\}$, οπότε $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
Επειδή $A \cap B = \{2, 8\}$, έχουμε ότι $(A \cap B)' = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Επίσης $A' \cup B' = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, οπότε $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

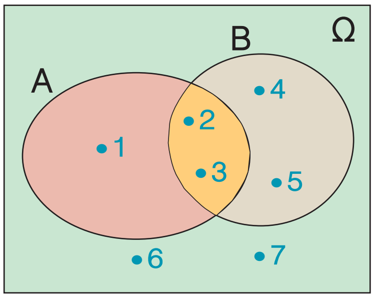
α) Τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 2, 1\}$ είναι ίσα. ☐
β) Τα σύνολα $A = \{6, 7\}$ και $B = \{67\}$ είναι ίσα. ☐
γ) Αν $A = \{\alpha, \beta\}$ και $B = \{\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, τότε $A \subseteq B$. ☐
δ) Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R}$, όπου $0x = 2\}$ είναι το κενό σύνολο. ☐
ε) $A \cup A' = \Omega$. ☐
στ) $A \cap A' = \varnothing$. ☐

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε σύνολο της στήλης Α, το ίσο του σύνολο από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\{x \in \mathbb{R}$, όπου $x^2 = 4\}$	1. $\{0, 1, 2\}$
β. $\{x \in \mathbb{N}$, όπου $x^2 = 4\}$	2. $\varnothing$
γ. $\{x \in \mathbb{Z}$, όπου $3x = 4\}$	3. $\{-2, 2\}$
δ. $\{x \in \mathbb{N}$, όπου $x \leq 2\}$	4. $\{2\}$
	5. $\{1, 2\}$

α	β	γ	δ

3 Από το διάγραμμα Venn του διπλανού σχήματος να προσδιορίσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:



Ω = ...

A = ... B = ...

A′ = ... B′ = ...

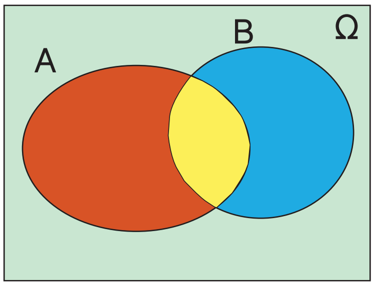
A ∪ B = ... A ∩ B = ...

4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε σύνολο της στήλης Α, το συμπλήρωμά του ως προς Ω = {α, β, γ, δ, ε} από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. {β}	1. {α, β, γ, δ, ε}
β. {α, β, ε}	2. ∅
γ. {α, β, γ, δ, ε}	3. {β, γ, ε}
δ. {γράμματα της λέξης δάδα}	4. {α, δ}
ε. ∅	5. {α, γ, δ, ε}
	6. {γ, δ}

α	β	γ	δ	ε

5 Με βάση το διπλανό διάγραμμα Venn να καθορίσετε το χρώμα ή τα χρώματα των παρακάτω συνόλων:



α) A ∪ B: ....

β) A ∩ B: ....

γ) A′: ....

δ) B′: ....

ε) (A ∪ B)′: ....

στ) (A ∩ B)′: ....

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) A = {x∈ℝ, όπου $x^2 = 25$} β) A = {x∈ℕ, όπου $x^2 = 25$}

γ) Γ = {x∈ℤ, όπου $-2 < x \leq 4$} δ) Δ = {x∈ℕ, όπου x διαιρέτης του 12}

2 Ποιο από τα σύνολα A = {0, 2, 4}, B = {–1, 0}, Γ = {1, 2, 3}, Δ = {(1, 2), (4, 5)} είναι υποσύνολο του συνόλου K = {0, 1, 2, 3, 4, 5} και ποιο είναι ίσο με το σύνολο Λ={άρτιοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 6} ή με το σύνολο M={x∈ℝ, όπου $x^2 + x = 0$};

3 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:

$$A = \{\text{ψηφία του αριθμού } 2123\}$$

και να βρείτε όλα τα υποσύνολά του.

4 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:

$$A = \{(x, y), \text{ όπου } x, y \in \mathbb{N} \text{ και } x + y = 4\}$$

5 Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ **β)** $B = \{ι, σ, τ, ο, ρ, α\}$ **γ)** $Γ = \{0, 2\}$

6 Με βασικό σύνολο $Ω = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 4, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$. Να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn και να προσδιορίσετε τα σύνολα:

α) $A \cup B$ **β)** $A \cap B$ **γ)** A' **δ)** B'

7 Δίνονται τα σύνολα:

$A = \{\text{γράμματα της λέξης άλγεβρα}\}$,

$B = \{\text{γράμματα της λέξης φρεγάτα}\}$ και

$Γ = \{\text{γράμματα της λέξης ελάφι}\}$.

α) Να γράψετε τα σύνολα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $B \cup Γ$, $A \cap B$, $A \cap Γ$.

γ) Να επαληθεύσετε ότι $A \cap (B \cup Γ) = (A \cap B) \cup (A \cap Γ)$.

8 Θεωρούμε τα σύνολα:

$A = \{\text{θεατές της τελετής έναρξης των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004}\}$.

$B = \{\text{θεατές της τελετής λήξης των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004}\}$.

Σε ποιο σύνολο ανήκει εκεινος που:

α) Παρακολούθησε και τις δύο τελετές.

β) Παρακολούθησε μία τουλάχιστον τελετή.

γ) Παρακολούθησε την τελετή έναρξης και όχι την τελετή λήξης.

δ) Δεν παρακολούθησε την τελετή έναρξης αλλά ούτε και την τελετή λήξης.

9 Δίνονται τα σύνολα $A = \{\text{αθλητές στίβου}\}$ και $B = \{\text{φοιτητές Πανεπιστημίου}\}$

Τι συμπεραίνετε για εκείνον που ανήκει στο σύνολο:

α) $A \cup B$ **β)** $A \cap B$ **γ)** A' **δ)** B'

ε) $A \cap B'$ **στ)** $A' \cap B$ **ζ)** $A' \cap B'$

5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

- ✓ *Μαθαίνω τι ονομάζεται πείραμα τύχης, ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του και πώς αυτός προσδιορίζεται.*
- ✓ *Μαθαίνω τι ονομάζεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης, πότε πραγματοποιείται και πότε είναι βέβαιο ή αδύνατο.*
- ✓ *Γνωρίζω πώς γίνονται οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων και ποια ενδεχόμενα ονομάζονται ασυμβίβαστα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε ποιο από τα παρακάτω πειράματα μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμά του με απόλυτη βεβαιότητα;

α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Ποια θα είναι η ένδειξή του;

β) Μετράμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει. Ποια θα είναι η ένδειξη του θερμομέτρου;

γ) Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Ποια θα είναι η πάνω όψη του;

δ) Επιλέγουμε ένα τυχαίο άρτιο αριθμό και τον διαιρούμε με το 2. Ποιο θα είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης;

ε) Επιλέγουμε στην τύχη ένα τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2. Ποιος θα είναι ο αριθμός αυτός;

στ) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ποιο θα είναι το ζεύγος των ενδείξεων;

2. Σε καθένα από τα πειράματα που δεν μπορείτε να προβλέψετε το αποτέλεσμά του, γνωρίζετε τα δυνατά του αποτελέσματα; Ποια είναι αυτά;

Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος

Σε πολλές περιπτώσεις, όταν κάνουμε ένα πείραμα, μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του. Για παράδειγμα:

– Αν μετρήσουμε τη θερμοκρασία μιας ποσότητας καθαρού νερού που βράζει, είμαστε βέβαιοι ότι η ένδειξη του θερμομέτρου θα είναι 100° Κελσίου.

– Αν επιλέξουμε ένα τυχαίο άρτιο αριθμό και τον διαιρέσουμε με το 2, είμαστε επίσης βέβαιοι ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι μηδέν.

Υπάρχουν όμως και πειράματα, τα οποία όσες φορές και αν τα επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά τους με απόλυτη βεβαιότητα. Ένα τέτοιο πείραμα λέγεται **πείραμα τύχης**. Για παράδειγμα,

– Αν ρίξουμε ένα ζάρι δεν είμαστε σε θέση κάθε φορά να προβλέψουμε την ένδειξή του, αν και γνωρίζουμε ότι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του είναι το $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με Ω και ονομάζεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος.

Γενικά

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.

Για παράδειγμα, κατά τη ρίψη ενός νομίσματος τα δυνατά αποτελέσματα είναι κεφαλή (Κ) και γράμματα (Γ), οπότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$.

Το πλήθος των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου Ω συμβολίζεται με $N(\Omega)$.

Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού είναι $N(\Omega) = 6$, ενώ στη ρίψη ενός νομίσματος είναι $N(\Omega) = 2$.

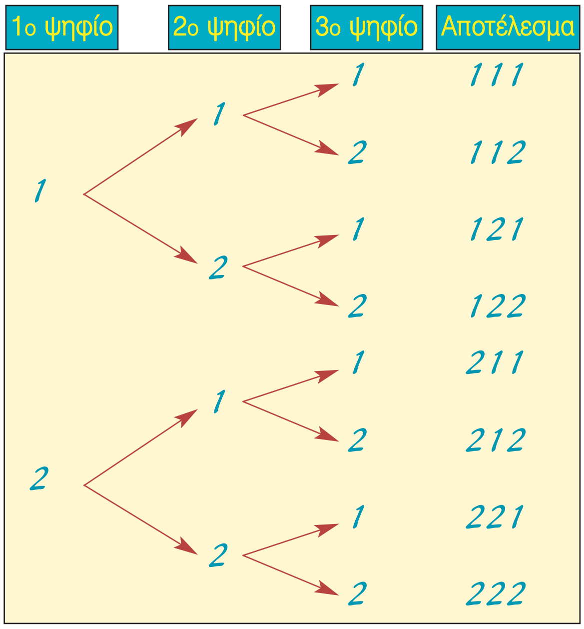
Εύρεση δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης

Σε πολλά πειράματα τύχης, όπως στη ρίψη ενός ζαριού ή ενός νομίσματος, μπορούμε να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εύκολα και άμεσα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα τύχης στα οποία προσδιορίζουμε ευκολότερα το δειγματικό τους χώρο, αν εφαρμόσουμε ειδικές τεχνικές ή μεθόδους.

Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε στην τύχη ένα τριψήφιο αριθμό που τα ψηφία του είναι 1 ή 2, για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο εργαζόμαστε ως εξής:

Γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το πρώτο ψηφίο και σε κάθε περίπτωση γράφουμε ποιο μπορεί να είναι το δεύτερο ψηφίο κ.ο.κ.



Με το διπλανό διάγραμμα, που ονομάζεται **δεντροδιάγραμμα**, βρίσκουμε ευκολότερα όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 1 ή 2, δηλαδή είναι:

$\Omega = \{111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222\}$, και περιέχει 8 στοιχεία ($N(\Omega) = 8$).

Αν ρίξουμε ένα ζάρι δύο φορές και σημειώσουμε κάθε φορά την ένδειξή του, τότε για να προσδιορίσουμε ευκολότερα το δειγματικό χώρο, χρησιμοποιούμε το διπλανό πίνακα. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη του πίνακα, δηλαδή είναι:

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 5), (6,6)\}$, και περιέχει 36 στοιχεία ($N(\Omega) = 36$).

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ενδεχόμενα

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το σύνολο $A = \{2, 4, 6\}$, που είναι υποσύνολο του Ω, ονομάζεται **ενδεχόμενο** του πειράματος και συγκεκριμένα είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
Ομοίως, το $B = \{1, 2, 3\}$ είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε αριθμό μικρότερο του 4.

Γενικά

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

Αν ρίξουμε ένα ζάρι και φέρουμε τον αριθμό 6, που ανήκει στο σύνολο $A = \{2, 4, 6\}$, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο A **πραγματοποιείται**. Το ενδεχόμενο όμως A πραγματοποιείται ακόμη και αν κατά τη συγκεκριμένη εκτέλεση του πειράματος εκτός από 6 φέρουμε 2 ή 4. Γι' αυτό τα στοιχεία 2, 4, 6 του ενδεχομένου A ονομάζονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
Για ένα ενδεχόμενο A, το πλήθος των ευνοϊκών του περιπτώσεων, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του, συμβολίζεται με **N(A)**. Για το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ είναι $N(A) = 3$.

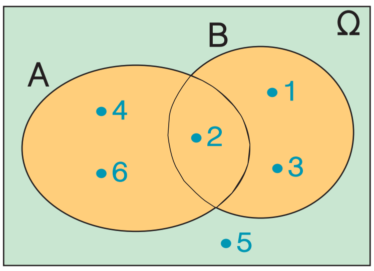
Βέβαιο – Αδύνατο ενδεχόμενο

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε το ενδεχόμενο να φέρουμε ένδειξη μικρότερη του 7 είναι το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.
Το ενδεχόμενο όμως να φέρουμε ένδειξη μεγαλύτερη του 6 είναι $\varnothing$. Το ενδεχόμενο αυτό δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος και γι' αυτό ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.

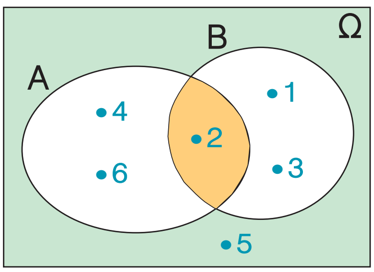
Πράξεις με ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, το ενδεχόμενο είναι σύνολο, οπότε παριστάνεται και με διάγραμμα Venn. Οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων γίνονται όπως και οι πράξεις μεταξύ συνόλων. Έτσι έχουμε:

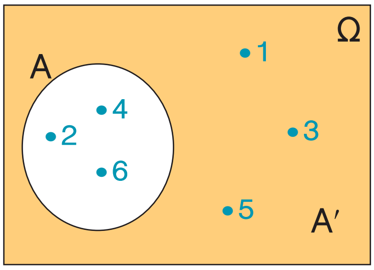
- **Ένωση** δύο ενδεχομένων A, B ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cup B$ που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.
  Π.χ. αν $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$, τότε
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



- **Τομή** δύο ενδεχομένων A, B ονομάζεται το ενδεχόμενο $A \cap B$ που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το A και το B.
  Π.χ. αν $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$, τότε
  $A \cap B = \{2\}$.



- **Συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται το ενδεχόμενο Α′ που πραγματοποιείται, όταν **δεν πραγματοποιείται το Α.**
  Π.χ. στο πείραμα τύχης «ρίψη ενός ζαριού» αν $A = \{2, 4, 6\}$, τότε $A' = \{1, 3, 5\}$.

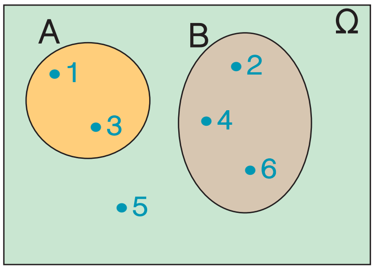


Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Σ' ένα πείραμα τύχης δύο ενδεχόμενα Α, Β είναι δυνατόν να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή να ισχύει

$$A \cap B = \varnothing.$$

Π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού, τα ενδεχόμενα $A = \{1, 3\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, οπότε σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι **ασυμβίβαστα**.



Γενικά

Δύο ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

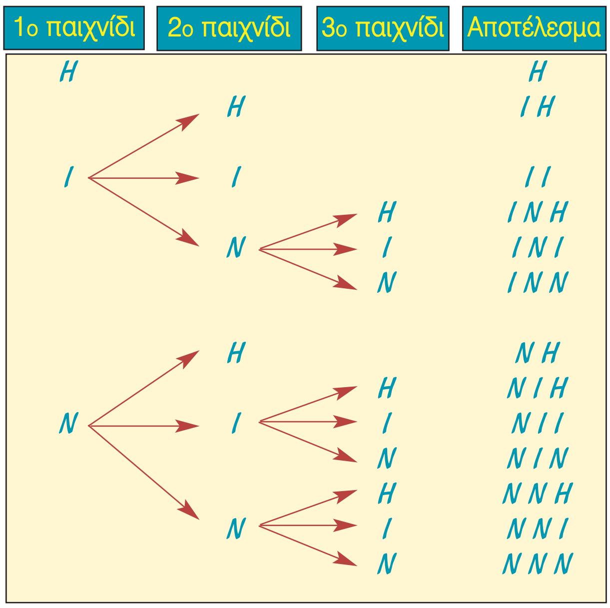
1 Σ' ένα τουρνουά σκακιού ένας παίκτης αποκλείεται από τη συνέχεια των αγώνων, αν ηττηθεί μία φορά ή φέρει δύο ισοπαλίες. Αν ένας παίκτης έδωσε το πολύ τρεις αγώνες, ποια είναι τα αποτελέσματα που θα μπορούσε να έχει φέρει μέχρι εκείνη τη στιγμή;

Λύση

Το πιθανό αποτέλεσμα ενός σκακιστή για κάθε παιχνίδι είναι ήττα (Η), ισοπαλία (Ι) ή νίκη (Ν). Τα δυνατά αποτελέσματα που έφερε ένας παίκτης που έδωσε το πολύ τρεις αγώνες, προκύπτουν ευκολότερα από το διπλανό διάγραμμα.

Το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων είναι:

Ω = {Η, ΙΗ, ΙΙ, ΙΝΗ, ΙΝΙ, ΙΝΝ, ΝΗ, ΝΙΗ, ΝΙΙ, ΝΙΝ, ΝΝΗ, ΝΝΙ, ΝΝΝ}



2 Σ' ένα κουτί υπάρχουν 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 4. Επιλέγουμε στην τύχη μια μπάλα, καταγράφουμε τον αριθμό της, την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

α) Να προσδιοριστεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.

β) Να προσδιοριστούν τα ενδεχόμενα.

Α. Οι δύο μπάλες έχουν τον ίδιο αριθμό.

Β. Ο αριθμός της πρώτης μπάλας είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό της δεύτερης μπάλας.

Γ. Ο αριθμός μιας μόνο μπάλας είναι 3.

Λύση

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τα 16 στοιχεία του διπλανού πίνακα, οπότε είναι:

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (4, 3)\ (4, 4)\}$.

2η μπάλα / 1η μπάλα	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

β) Το ενδεχόμενο Α έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία ο πρώτος αριθμός είναι ίδιος με τον δεύτερο.

Άρα: $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

Το ενδεχόμενο Β έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία ο πρώτος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο.

Άρα: $B = \{(2, 1)\ (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\ (4, 3)\}$.

Το ενδεχόμενο Γ έχει ως στοιχεία εκείνα τα ζεύγη του Ω στα οποία μόνο ένας από τους δύο αριθμούς είναι το 3.

Άρα: $\Gamma = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4), (1, 3), (2, 3), (4, 3)\}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης:

α) Ρίχνω ένα ζάρι και καταγράφω την πάνω όψη του.

β) Αφήνω ένα βαρύ σώμα να πέσει και καταγράφω τη φορά της κίνησής του.

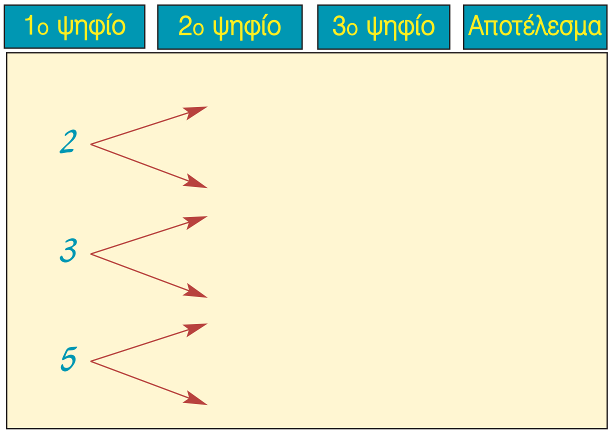
γ) Βγάζω ένα φύλλο από μία τράπουλα και σημειώνω ποιο είναι.

δ) Ανοίγω ένα βιβλίο και σημειώνω τον αριθμό που αντιστοιχεί στη δεξιά σελίδα του.

2 Επιλέγουμε διαδοχικά δύο μαθητές Γυμνασίου και καταγράφουμε την τάξη όπου φοιτούν. Ένας μαθητής για να βρει το δειγματικό χώρο έφτιαξε το διπλανό πίνακα. Μήπως έκανε κάποιο λάθος;

2ος μαθητής / 1ος μαθητής	Α	Β	Γ
Α	ΑΑ	ΑΒ	ΑΓ
Β	ΑΒ	ΒΒ	ΒΓ
Γ	ΓΑ	ΓΒ	ΓΓ

3 Το δεντροδιάγραμμα με το οποίο ένας μαθητής ήθελε να προσδιορίσει όλους τους τριψήφιους αριθμούς με ψηφία 2, 3, 5, που το καθένα χρησιμοποιείται μία μόνο φορά, έμεινε ημιτελές. Μπορείτε να το συμπληρώσετε;



4 Αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ενδεχόμενα του πειράματος;

α) $A = \{4, 8, 10\}$ **β)** $B = \{0, 2, 3, 6\}$ **γ)** $\Gamma = \{4, 7, 8, 10\}$ **δ)** $\Delta = \{6\}$

5 Ρίχνουμε ένα ζάρι και φέρνουμε 6. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα πραγματοποιούνται:

α) $A = \{2, 4, 6\}$ **β)** $B = \{1, 3, 5\}$ **γ)** $\Gamma = \{4, 5, 6\}$ **δ)** $\Delta = \{1, 2, 3\}$

6 ‘Ενα κουτί περιέχει κόκκινες, κίτρινες και μαύρες μπίλιες. Αν επιλέξω μια μπίλια ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι αδύνατο;

α) Η μπίλια είναι κόκκινη. **β)** Η μπίλια είναι κίτρινη.
γ) Η μπίλια είναι πράσινη. **δ)** Η μπίλια δεν είναι μαύρη.

7 Επιλέγω στην τύχη ένα μήνα του έτους. Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι βέβαιο;

α) Ο μήνας έχει 31 ημέρες.
β) Ο μήνας είναι θερινός.
γ) Το όνομα του μήνα αρχίζει από Μ.
δ) Ο μήνας έχει περισσότερες από 27 ημέρες.

8 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ενδεχόμενο της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $A \cup B$ β. $A \cap B$ γ. A'	1. Δεν πραγματοποιείται το Α. 2. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β. 3. Δεν πραγματοποιείται το Β. 4. Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το Α και το Β.

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Το κυλικείο ενός σχολείου διαθέτει για φαγητό σάντουϊτς (σ), τυρόπιτα (τ), γλυκό (γ) και για αναψυκτικό πορτοκαλάδα (π), λεμονάδα (λ).
Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή που αγόρασε ένα είδος φαγητού και ένα είδος αναψυκτικού και καταγράφουμε την προτίμησή του. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

2 Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

3 Σ' έναν προκριματικό όμιλο των Πανευρωπαϊκών αγώνων Μπάσκετ κληρώθηκαν να παίξουν τέσσερις ομάδες Α, Β, Γ, Δ δίνοντας μεταξύ τους από δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Με τη βοήθεια ενός πίνακα να βρείτε όλα τα ζεύγη των αντιπάλων.

4 Σ' ένα κουτί υπάρχουν τρεις όμοιες μπάλες, μία κόκκινη, μία άσπρη, μία μπλε και επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα.
α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Με πόσες το πολύ κινήσεις θα πάρουμε την κόκκινη μπάλα;
γ) Με πόσες κινήσεις μπορούμε να αναγνωρίσουμε το χρώμα κάθε μπάλας;

5 Σ' ένα τηλεοπτικό παιχνίδι συμμετέχουν 4 άντρες (Δημήτρης, Κώστας, Μιχάλης, Παναγιώτης) και 3 γυναίκες (Ειρήνη, Ζωή, Σταματίνα). Επιλέγουμε στην τύχη έναν άντρα και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφουμε τα ονόματα των αντιπάλων. Να προσδιορίσετε:
α) Το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Τα ενδεχόμενα Α: διαγωνίστηκαν η Ειρήνη ή η Ζωή.
Β: Δε διαγωνίστηκε ο Μιχάλης.

6 Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα ενδεχόμενα
$A = \{x \in \Omega$, όπου x διαιρέτης του $9\}$ και $B = \{x \in \Omega$, όπου $x < 6\}$
και να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν:
α) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.
β) Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το Α και το Β.
γ) Δεν πραγματοποιείται το Β.

7 Οι δράστες μια κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.
α) Ποιο είναι το σύνολο των πιθανών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου;
β) Να προσδιορίσετε τα ενδεχόμενα:
Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.
Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Έννοια της πιθανότητας

✓ *Μαθαίνω τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.*
✓ *Γνωρίζω τους βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Επιλέγουμε στην τύχη ένα αυτοκίνητο του οποίου ο αριθμός κυκλοφορίας είναι ζυγός και καταγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του.

– Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι είναι πιθανότερο να είναι μικρότερο του 6 παρά να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα άρτιο μονοψήφιο φυσικό αριθμό, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Αν κάθε αριθμός επιλέγεται στην τύχη και δεν έχει κανένα πλεονέκτημα έναντι των άλλων, τότε όλοι οι αριθμοί έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής και λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του δειγματικού χώρου είναι **ισοπίθανα**.

Στο εξής, όταν λέμε ότι η επιλογή γίνεται στην τύχη θα εννοείται ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Το ενδεχόμενο να επιλέξουμε από τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω αριθμό μικρότερο του 6, είναι το $A = \{0, 2, 4\}$ και πραγματοποιείται αν επιλέξουμε 0 ή 2 ή 4, ενώ το ενδεχόμενο να επιλέξουμε αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 6 είναι $B = \{6, 8\}$ και πραγματοποιείται αν επιλέξουμε 6 ή 8. Βλέπουμε λοιπόν ότι από τους 5 αριθμούς του δειγματικού χώρου Ω, 3 αριθμοί εξασφαλίζουν την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α και 2 αριθμοί εξασφαλίζουν την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α είναι $\frac{3}{5}$ ή 60% και συμβολίζουμε $P(A) = \frac{3}{5}$ ή 60%, ενώ η πιθανότητα της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Β είναι $P(B) = \frac{2}{5}$ ή 40%. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ο αριθμητής του κλάσματος είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιτώσεων για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου, αφού $N(A) = 3$ και $N(B) = 2$, ενώ ο παρονομαστής του κλάσματος είναι το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος, αφού $N(\Omega) = 5$.

Γενικά

Σ' ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται ο αριθμός

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Για παράδειγμα, από ένα κουτί που περιέχει 25 όμοιες μπάλες, από τις οποίες οι 11 είναι πράσινες και οι 14 είναι κόκκινες, αν βγάλουμε στην τύχη μία, τότε οι πιθανότητες των ενδεχομένων Π: Βγάζω πράσινη μπάλα και Κ: Βγάζω κόκκινη μπάλα είναι:

$$P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{11}{25} \text{ ή } 44\% \quad \text{και} \quad P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{14}{25} \text{ ή } 56\%.$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ακόμη ότι:

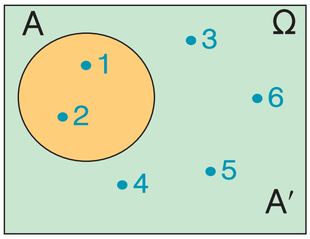
$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1 \quad \text{και} \quad P(\varnothing) = \frac{N(\varnothing)}{N(\Omega)} = 0$$

Η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου Α είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το 0 και μικρότερος ή ίσος από το 1, αφού το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου τα 6 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.



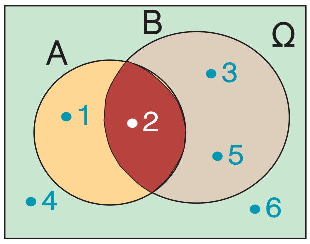
Έτσι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{1, 2\}$ είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Το συμπληρωματικό του Α είναι το $A' = \{3, 4, 5, 6\}$ και η πιθανότητά του είναι $P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Παρατηρούμε ότι $P(A) + P(A') = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Γενικά

Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A, A' ισχύει $P(A) + P(A') = 1$.

Αν τώρα πάρουμε τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ και προσδιορίσουμε την ένωση και την τομή τους, τότε έχουμε: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ και $A \cap B = \{2\}$.



Άρα $P(A) = \frac{2}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ και $P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$,

δηλαδή ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Γενικά

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Τις προηγούμενες ιδιότητες χρησιμοποιούμε συχνά για να υπολογίσουμε πιθανότητες και γι' αυτό λέμε ότι αποτελούν **βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Επιλέγουμε στην τύχη ένα μήνα του έτους. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: Ο μήνας αρχίζει από Μ.

Β: Ο μήνας είναι θερινός.

Γ: Ο μήνας έχει 31 ημέρες.

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει 12 στοιχεία, οπότε το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι $N(\Omega) = 12$.

Το ενδεχόμενο Α είναι Α $=$ {Μάρτιος, Μάϊος}, οπότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για την πραγματοποίησή του είναι $N(A) = 2$.

Άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$ ή περίπου 16,7%.

Το ενδεχόμενο Β είναι Β $=$ {Ιούνιος, Ιούλιος, Αύγουστος}, οπότε έχουμε $N(B) = 3$.

Άρα $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ ή 25%.

Το ενδεχόμενο Γ είναι

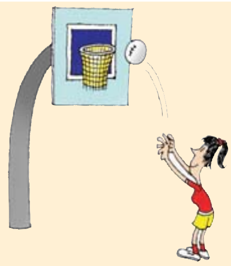
Γ $=$ {Ιανουάριος, Μάρτιος, Μάϊος, Ιούλιος, Αύγουστος, Οκτώβριος, Δεκέμβριος},

οπότε $N(\Gamma) = 7$. Άρα $P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{7}{12}$ ή περίπου 58,3%.

2 Μια ομάδα δίνει δύο αγώνες. Αν η πιθανότητα να κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι 45%, η πιθανότητα να κερδίσει τον δεύτερο αγώνα είναι 60% και η πιθανότητα να κερδίσει και τους δύο αγώνες είναι 27%, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα.

β) Να κερδίσει έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες.



Λύση

Ονομάζουμε Α το ενδεχόμενο να κερδίσει η ομάδα τον πρώτο αγώνα και Β το ενδεχόμενο να κερδίσει τον δεύτερο αγώνα. Το ενδεχόμενο να κερδίσει και τους δύο αγώνες είναι $A \cap B$, οπότε έχουμε:

$$P(A) = \frac{45}{100}, \quad P(B) = \frac{60}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{27}{100}.$$

α) Το ενδεχόμενο να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι το συμπλήρωμα του Α, δηλαδή το A'. Γνωρίζουμε όμως ότι $P(A) + P(A') = 1$, οπότε έχουμε:

$$\frac{45}{100} + P(A') = 1 \quad \text{ή} \quad P(A') = 1 - \frac{45}{100} \quad \text{ή} \quad P(A') = \frac{55}{100}.$$

Άρα η πιθανότητα να μην κερδίσει τον πρώτο αγώνα είναι 55%.

β) Το ενδεχόμενο να κερδίσει η ομάδα έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β, οπότε είναι το $A \cup B$.

Γνωρίζουμε όμως ότι $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, οπότε έχουμε:

$$P(A \cup B) + \frac{27}{100} = \frac{45}{100} + \frac{60}{100} \quad \text{ή} \quad P(A \cup B) = \frac{45}{100} + \frac{60}{100} - \frac{27}{100} = \frac{78}{100}.$$

Άρα η πιθανότητα να κερδίσει έναν τουλάχιστον από τους δύο αγώνες είναι 78%.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Σε ποιο από τα παρακάτω πειράματα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα;

α) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες, από τις οποίες 4 είναι πράσινες, 4 κόκκινες και 4 άσπρες, επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της.

β) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες, από τις οποίες 5 είναι πράσινες, 5 κόκκινες και 2 άσπρες, επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της.

γ) Από τη λεξη «χαρά» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι.

δ) Από τη λέξη «χώρα» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι.

2 Αν επιλέξουμε τυχαία ένα γράμμα της αλφαβήτου, τότε η πιθανότητα να είναι φωνήεν είναι:

α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{24}$ γ) $\frac{7}{24}$ δ) $\frac{17}{24}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α μπορεί να είναι $P(A) = 1{,}02$. ☐

β) Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι 80%, τότε γράφουμε $P(A) = 80$. ☐

γ) Το βέβαιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 1 και το αδύνατο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 0. ☐

δ) Αν η πιθανότητα να βρέξει είναι 32%, τότε η πιθανότητα να μη βρέξει είναι 68%. ☐

4 Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο Α είναι $\frac{3}{5}$, τότε η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το Α είναι:

α) $\frac{5}{3}$ β) $\frac{1}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5 Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύουν $P(A) = \frac{4}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{11}$.

Ένας μαθητής υπολόγισε ότι $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$. Είναι σωστή η απάντησή του; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Επιλέγουμε στην τύχη έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως και το 13. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι:
α) άρτιος **β)** πολλαπλάσιο του 4;

2 Σε μια κλήρωση υπάρχουν 1200 λαχνοί από τους οποίους κερδίζει ο ένας. Πόσο % πιθανότητα έχει να κερδίσει κάποιος που αγόρασε 6 λαχνούς;

3 Σε μια τράπουλα 52 φύλλων υπάρχουν 12 φιγούρες. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα φύλλο, ποια είναι η πιθανότητα να μην είναι φιγούρα;

4 Σε ένα κουτί υπάρχουν 20 όμοιες μπάλες, από τις οποίες οι 8 είναι γαλάζιες, οι 7 είναι κίτρινες και οι 5 είναι άσπρες. Βγάζουμε στην τύχη μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Η μπάλα να είναι κίτρινη.
Β: Η μπάλα να μην είναι άσπρη.
Γ: Η μπάλα να είναι γαλάζια ή άσπρη.

5 Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η βαθμολογία των 25 μαθητών ενός τμήματος στα Μαθηματικά. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα να έχει βαθμό:
α) 15
β) μικρότερο του 14
γ) μεγαλύτερο ή ίσο του 16
δ) 19 ή 20

Βαθμός	Μαθητές
9	1
10	2
12	3
13	2
14	4
15	3
16	2
17	2
18	3
19	2
20	1

6 Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές την ίδια ένδειξη;

7 Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Φέρνουμε και τις δύο φορές 6.
Β: Φέρνουμε την ίδια ένδειξη και τις δύο φορές.
Γ: Φέρνουμε μία τουλάχιστον φορά 5.

8 Από τους 25 μαθητές μιας τάξης μόνο οι 12 έλυσαν μια άσκηση. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει λύσει την άσκηση;

Αν ο πρώτος μαθητής που επιλέξαμε δεν έλυσε την άσκηση και από τους υπόλοιπους επιλέξουμε στην τύχη ένα δεύτερο μαθητή, τότε ποια είναι η πιθανότητα να έχει λύσει την άσκηση;

9 Η πιθανότητα να μην πάει κάποιος στο θέατρο είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να πάει. Ποια είναι τελικά η πιθανότητα να πάει στο θέατρο;

10 Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύουν $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$ και $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

11 Αν $P(A) = \frac{5}{14}$, $P(B') = \frac{11}{14}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

12 Η πιθανότητα να γνωρίζει κάποιος Αγγλικά είναι 42%, να γνωρίζει Γαλλικά είναι 21% και να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι 15%. Ποια είναι η πιθανότητα να γνωρίζει μία τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες;

13 Ο καθηγητής των Μαθηματικών διαπίστωσε ότι στο μάθημα της Γεωμετρίας, από τους 24 μαθητές ενός τμήματος, 18 είχαν κανόνα, 14 είχαν διαβήτη και 20 είχαν κανόνα ή διαβήτη. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να έχει κανόνα και διαβήτη;

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Η μεταβίβαση χαρακτηριστικών από γενιά σε γενιά – Ο Μέντελ και οι νόμοι της κληρονομικότητας

Η μεταβίβαση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών από γονείς σε απογόνους, μελετήθηκε στα φυτά από τον Γ. Μέντελ.
Αν διασταυρώσουμε δύο ροζ λουλούδια μοσχομπίζελου, υβρίδια πρώτης γενιάς, τότε στα 4 λουλούδια που θα πάρουμε στη δεύτερη γενιά, 1 θα είναι κόκκινο, 2 ροζ και 1 λευκό. Δηλαδή η πιθανότητα να πάρουμε στη δεύτερη γενιά κόκκινο λουλούδι είναι $\frac{1}{4}$ ή 25%, ροζ λουλούδι $\frac{2}{4}$ ή 50% και λευκό λουλούδι $\frac{1}{4}$ ή 25%.

– Πώς συνέβαλε η θεωρία των πιθανοτήτων στη διατύπωση των νόμων της κληρονομικότητας;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Δίνονται τα σύνολα $\Omega = \{x \in \mathbb{N}$, όπου $x \leq 8\}$, $A = \{x \in \Omega$, όπου x άρτιος$\}$ και $B = \{x \in \Omega$, όπου x διαιρέτης του $8\}$.

α) Να γράψετε τα σύνολα Ω, Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και τα A', B' ως προς βασικό σύνολο Ω.

γ) Αν επιλέξετε τυχαία ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε την πιθανότητα:

i) να ανήκει στο Α
ii) να μην ανήκει στο Β
iii) να ανήκει στο Α και στο Β
iv) να ανήκει στο Α ή στο Β.

2 Σ' ένα καταψύκτη υπάρχουν 12 παγωτά, από τα οποία 3 είναι βανίλια, 3 σοκολάτα, 3 φράουλα και 3 φιστίκι. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει η Μαρία τυχαία ένα παγωτό με γεύση φράουλας που μόνο αυτό δεν της αρέσει; Δύο μέρες αργότερα 1 παγωτό βανίλια, 2 παγωτά σοκολάτα και 1 παγωτό φράουλα έχουν καταναλωθεί. Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να πάρει η Μαρία τυχαία ένα παγωτό που να της αρέσει;

3 Τα 80 παιδιά της Γ′ τάξης ενός Γυμνασίου επέλεξαν να διδαχτούν μια δεύτερη ξένη γλώσσα ανάμεσα στα Γαλλικά και τα Γερμανικά. Τα 18 από τα 30 αγόρια επέλεξαν τα Γερμανικά, ενώ 36 κορίτσια επέλεξαν τα Γαλλικά.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	Αγόρια	**Κορίτσια**
Γαλλικά		
Γερμανικά		

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί. Να βρείτε την πιθανότητα:

i) να είναι αγόρι
ii) να έχει επιλέξει τα Γερμανικά
iii) να είναι αγόρι και να έχει επιλέξει τα Γαλλικά
iv) να είναι κορίτσι ή να έχει επιλέξει τα Γερμανικά.

4 Από το σύνολο $\{25^\circ, 36^\circ, 65^\circ, 92^\circ\}$ που περιέχει ως στοιχεία μέτρα γωνιών, επιλέγουμε τυχαία δύο διαφορετικούς αριθμούς. Αν αυτοί εκφράζουν τα μέτρα δύο γωνιών ενός τριγώνου, ποια είναι η πιθανότητα το τρίγωνο αυτό να είναι ορθογώνιο;

5 Από το σύνολο $\{8, 12, 16, 20\}$ επιλέγουμε τυχαία τρεις διαφορετικούς αριθμούς. Ποια η πιθανότητα οι τρεις αυτοί αριθμοί να εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου;

6 Από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς τον ένα μετά τον άλλο και με αυτούς σχηματίζουμε ένα κλάσμα. Ο πρώτος είναι ο αριθμητής και ο δεύτερος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος. Να βρείτε την πιθανότητα ώστε το κλάσμα **α)** να εκφράζει ακέραιο αριθμό **β)** να είναι μικρότερο της μονάδας.

7 Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ και $P(A') + P(B') = \frac{11}{10}$, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

8 Ο Νίκος ισχυρίζεται ότι, όταν ρίχνουμε δύο ζάρια, η πιθανότητα να έχουν άθροισμα 8 είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να έχουν άθροισμα 7. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Το τρίγωνο του Πασκάλ και οι Πιθανότητες

Ο Πασκάλ χρησιμοποίησε το αριθμητικό τρίγωνο (τρίγωνο Πασκάλ) προκειμένου να προσδιορίσει το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων κατά τη ρίψη ενός νομίσματος. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα νόμισμα μία, δύο, τρεις φορές, τότε τα δυνατά αποτελέσματα και το πλήθος τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ρίψεων	Δυνατά αποτελέσματα	Τρίγωνο Πασκάλ	Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων
1	Κ Γ	1 1	$2 = 2^1$
2	ΚΚ ΚΓ ΓΚ ΓΓ	1 2 1	$4 = 2^2$
3	ΚΚΚ ΚΚΓ ΚΓΚ ΓΚΚ ΓΓΚ ΓΚΓ ΚΓΓ ΓΓΓ	1 3 3 1	$8 = 2^3$

Να βρείτε:

α) Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων σε 5 ρίψεις του νομίσματος.

β) Την πιθανότητα να φέρουμε την ίδια ένδειξη και τις 5 φορές.

γ) Την πιθανότητα να φέρουμε όλες τις φορές γράμματα, αν ρίξουμε το νόμισμα 6 φορές.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΣΥΝΟΛΑ

- **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που καθορίζονται με απόλυτη σαφήνεια και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
- Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με **αναγραφή** ή με **περιγραφή** των στοιχείων του και με το **διάγραμμα Venn**.
- **Ίσα** ονομάζονται δύο σύνολα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- Ένα σύνολο Α ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β και συμβολίζεται $A \subseteq B$.
- **Κενό** σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\varnothing$.

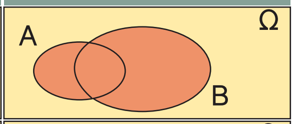
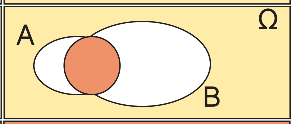
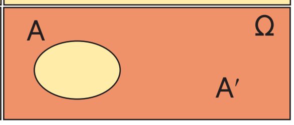
Πράξεις με σύνολα

- **Ένωση** δύο συνόλων Α, Β ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων και συμβολίζεται $A \cup B$.
- **Τομή** δύο συνόλων Α, Β ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία και των δύο συνόλων και συμβολίζεται $A \cap B$.
- **Συμπλήρωμα** ενός συνόλου Α ως προς ένα βασικό σύνολο Ω ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται A'.

Β. ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- **Πείραμα τύχης** ονομάζεται κάθε πείραμα που όσες φορές και αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του με απόλυτη βεβαιότητα.
- **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.
- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
- Ένα ενδεχόμενο **πραγματοποιείται**, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του ενδεχομένου.
- **Βέβαιο** ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος.
- **Αδύνατο** ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος.

Πράξεις με ενδεχόμενα

	Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Σημασία	Παράσταση
Ένωση	$A \cup B$	« Α ή Β»	Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.	
Τομή	$A \cap B$	« Α και Β»	Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β.	
Συμπλήρωμα	A'	« Όχι Α»	Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.	

- **Ασυμβίβαστα** ονομάζονται δύο ενδεχόμενα Α και Β, όταν $A \cap B = \varnothing$.

Γ. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- **Κλασικός ορισμός της πιθανότητας**

  Σ' ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ονομάζουμε τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

  – Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$.

  – Ισχύουν $P(\Omega) = 1$ και $P(\varnothing) = 0$.

- **Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων**

  Σ' ένα πείραμα τύχης

  – για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α ισχύει $P(A) + P(A') = 1$

  – για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.