4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$

Γενικές ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

Επανάληψη – Ανακεφαλαίωση

4.1 Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$

- ✓ *Θυμάμαι τι ονομάζεται συνάρτηση και τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.*
- ✓ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α \neq 0$.*
- ✓ *Μαθαίνω να βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης $y = αx^2$ από τη γραφική της παράσταση.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
- Ο αριθμός y που είναι ίσος με το τετράγωνο ενός αριθμού x είναι y = ...
- Το εμβαδόν y ενός ορθογωνίου με πλάτος x και διπλάσιο μήκος είναι y = ...
- Το εμβαδόν y ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα x είναι y = ...

2. Στην πρώτη πρόταση, όταν ο x πάρει τις τιμές –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές του y;

3. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη (x, y) που προσδιορίσατε και να σχεδιάσετε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α > 0$

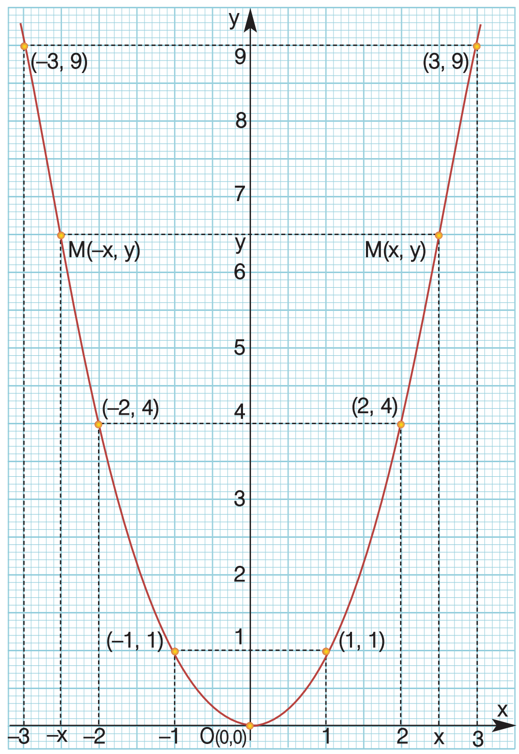
Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.

Π.χ. Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 = 1$,
για $x = 2$ έχουμε $y = 2^2 = 4$ κ.τ.λ.

Σ' ένα σύστημα αξόνων, αν παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη (x, y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μια τιμή του x, τότε το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί τη **γραφική παράστασή** της.

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

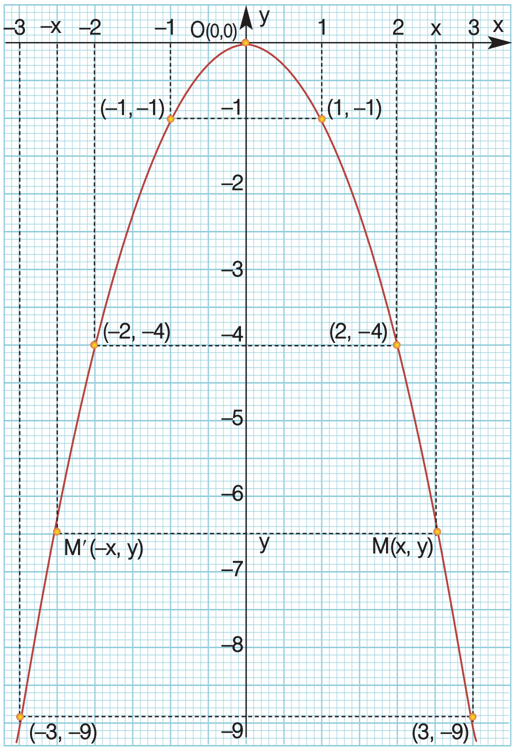
– Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$.
– Η συνάρτηση $y = x^2$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.
– Για $x = -3$ ή $x = 3$ έχουμε $y = 9$ και τα σημεία $(-3, 9)$ και $(3, 9)$ της παραβολής είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Γενικά σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α < 0$

Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2$, η οποία είναι επίσης μια παραβολή.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

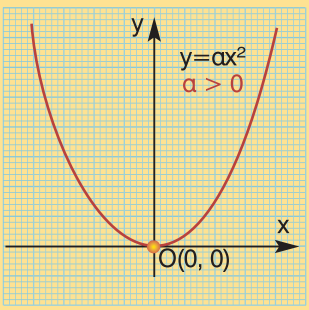
– Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \leq 0$.
– Η συνάρτηση $y = -x^2$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.
– Σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = -x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.



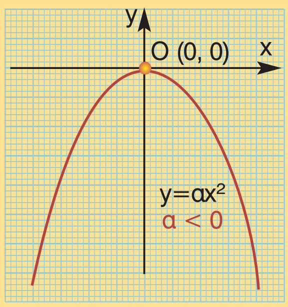
Γενικά

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$.

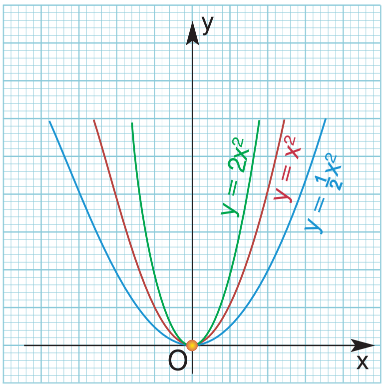
- Έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
- Αν $α > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και πάνω και η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

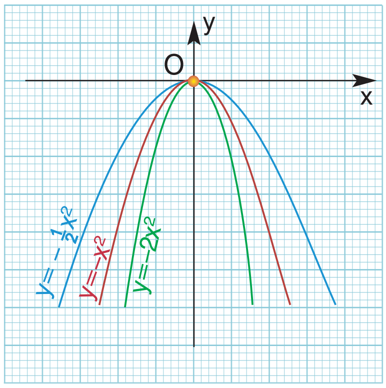


- Αν $α < 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και κάτω και η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

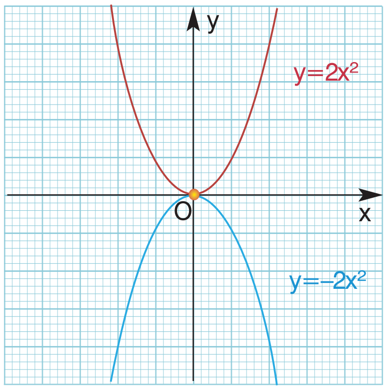


Στα παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει την παραβολή $y = αx^2$ για διάφορες τιμές του αριθμού α. Παρατηρούμε ότι:





α) Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $y = αx^2$ ως προς τον άξονα x′x, αλλά καθορίζει και το «άνοιγμά» της.
Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει».



β) Αν σχεδιάσουμε τις παραβολές $y = 2x^2$ και $y = -2x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων, τότε παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον x′x.

Γενικά:
Οι παραβολές $y = αx^2$ και $y = -αx^2$ είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον x′x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η παραβολή $y = αx^2$ να διέρχεται από το σημείο Α $(-1, 3)$.

Λύση

Για να διέρχεται η παραβολή $y = αx^2$ από το σημείο Α$(-1, 3)$, πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου Α, να επαληθεύουν την εξίσωση $y = αx^2$.
Άρα, για $x = -1$ και $y = 3$, έχουμε $3 = α\,(-1)^2$, οπότε $α = 3$.

2 Να σχεδιαστεί η παραβολή $y = -2x^2$ όταν $-2 \leq x \leq 2$ και να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η μεταβλητή y. Ποια σημεία της παραβολής έχουν τεταγμένη $-\frac{9}{2}$;

Λύση

Σχηματίζουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -2x^2$.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–2	0	–2	–8

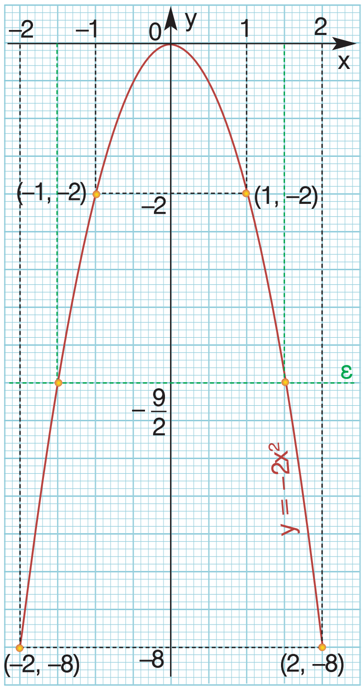
Με τη βοήθεια των τιμών αυτών σχεδιάζουμε την παραβολή. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι, για όλες τις τιμές του x, από το –2 έως και το 2 ($-2 \leq x \leq 2$) οι αντίστοιχες τιμές του y είναι από το –8 έως και το 0 ($-8 \leq y \leq 0$).
Άρα, η μέγιστη τιμή του y είναι το 0, όταν $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή του y είναι το –8, όταν $x = -2$ ή $x = 2$.

Για $y = -\frac{9}{2}$ έχουμε:

$-\frac{9}{2} = -2x^2$ ή $x^2 = \frac{9}{4}$, οπότε $x = \pm\frac{3}{2}$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Τα σημεία αυτά μπορούν να βρεθούν και από τη γραφική παράσταση, αφού είναι τα κοινά σημεία της ευθείας $ε : y = -\frac{9}{2}$ και της παραβολής $y = -2x^2$.

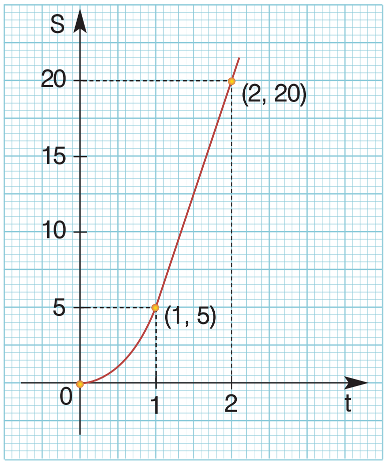


3 **Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι αν ένα σώμα κάνει ελεύθερη πτώση, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα S, που δίνεται από τον τύπο $S = \frac{1}{2}gt^2$ ($g \approx 10 m/sec^2$). Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διαστήματος – χρόνου.**

Λύση

Το διάστημα S για $g = 10$ m/sec² δίνεται από τον τύπο $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 5t^2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $S = 5t^2$ είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Ο(0, 0) και διέρχεται από τα σημεία (1, 5), (2, 20) κ.τ.λ.
Ο χρόνος όμως δεν παίρνει αρνητικές τιμές, οπότε το διάγραμμα του διαστήματος – χρόνου είναι το τμήμα της προηγούμενης παραβολής που βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην παραβολή $y = -2x^2$;

α) Α(–1, 2) **β)** Β(2, –8) **γ)** $Γ\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **δ)** Δ(–2, 8)

2 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παίρνουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή;

α) $y = -4x^2$ β) $y = 4x^2$ γ) $y = (-4x)^2$ δ) $y = -(4x)^2$.

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Η παραβολή $y = 6x^2$ έχει κορυφή το σημείο Ο(0, 0). ☐

β) Ο άξονας x΄x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = x^2$. ☐

γ) Οι παραβολές $y = 8x^2$ και $y = -8x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y. ☐

δ) Η συνάρτηση $y = 3x^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = 0$. ☐

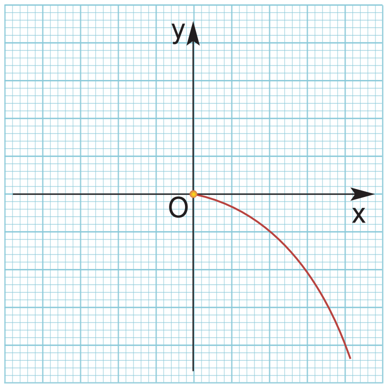
ε) Η συνάρτηση $y = -2x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή την $y = 0$. ☐

στ) Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(–1, 2), τότε θα διέρχεται και από το σημείο Λ(1, 2). ☐

4 Στο διπλανό σύστημα αξόνων έχουμε σχεδιάσει ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = -\frac{1}{4}x^2$.

α) Να ολοκληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{4}x^2$.



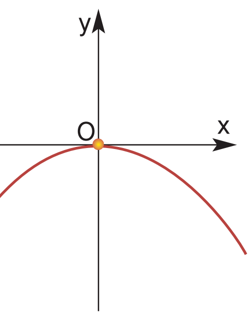
5 Αν η παραβολή $y = αx^2$ διέρχεται από το σημείο Μ(2, –4), τότε:

α) $α = 2$ β) $α = -1$ γ) $α = -4$ δ) $α = \frac{1}{8}$

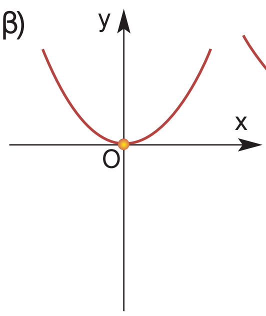
6 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ 2) $y = -3x^2$ 3) $y = -\frac{1}{3}x^2$ 4) $y = x^2$

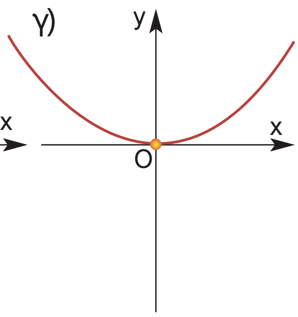
α)



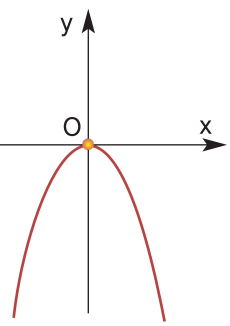
β)



γ)



δ)



α	β	γ	δ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

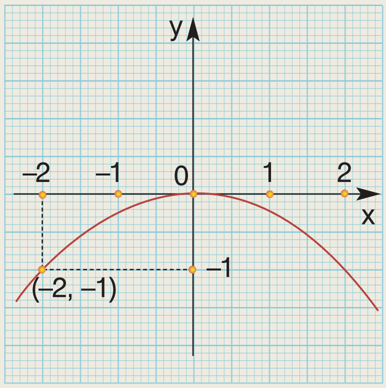
1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y = 2x^2$ β) $y = -2x^2$ γ) $y = -\frac{3}{4}x^2$ δ) $y = \frac{2}{3}x^2$

2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:

α) $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ και $y = 3x^2$ β) $y = \frac{3}{2}x^2$ και $y = -\frac{3}{2}x^2$

3 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος.
Να σχεδιάσετε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x′x και να γράψετε την εξίσωσή της.



4 Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = -4x^2$ που έχουν τεταγμένη –9.

5 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η παραβολή $y = (λ + 2)x^2$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6 Αν η συνάρτηση $y = \frac{1}{λ}x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(2, λ), να βρείτε την τιμή του αριθμού λ.

7 Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα υ και έχει μάζα m δίνεται από τον τύπο $E_K = \frac{1}{2}mυ^2$.

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - ενέργειας για τρία σώματα που έχουν μάζες 1, 2 και 4 αντιστοίχως.

β) Αν τα σώματα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια $E_K = 2$, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

γ) Αν τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα $υ = \frac{3}{2}$, τότε από το διάγραμμα να προσδιορίσετε, ποιο από τα τρία σώματα έχει τη μεγαλύτερη ενέργεια.

4.2 Η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

✓ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ και σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη του πίνακα:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y							

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και την παραβολή $y = x^2$.

3. Να αποτυπώσετε την παραβολή $y = x^2$ σ' ένα διαφανές χαρτί και να το μετακινήσετε ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $(2, -1)$ και ο άξονας συμμετρίας της να συμπέσει με την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.
Είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ παραβολή;

Οι συναρτήσεις $y = x^2$ και $y = -x^2$, που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπως και οι συναρτήσεις $y = 3x^2 - 1$, $y = -2x^2 + 8x$, $y = x^2 - 4x + 3$ κ.τ.λ., ονομάζονται τετραγωνικές συναρτήσεις.

Γενικά

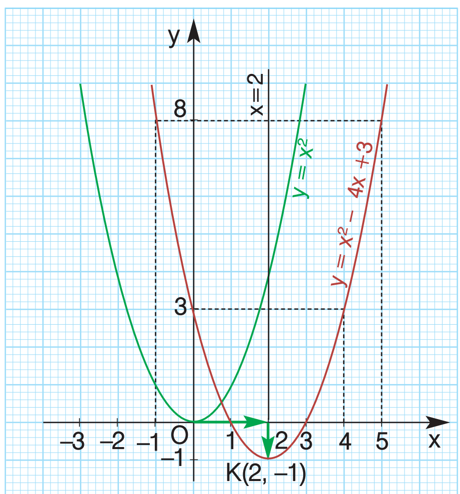
Τετραγωνική ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.

Αν έχουμε μία τετραγωνική συνάρτηση, όπως την $y = x^2 - 4x + 3$ και θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε την παραβολή $y = x^2$, την αποτυπώνουμε σ' ένα διαφανές χαρτί και τη μετακινούμε οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες και κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα. Διαπιστώνουμε ότι η παραβολή αυτή συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$.



Άρα η γραφική παράστασης της $y = x^2 - 4x + 3$ είναι επίσης παραβολή, με κορυφή το σημείο Κ(2, –1) και άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.

Γενικά

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο $K\left(-\dfrac{β}{2α}, -\dfrac{Δ}{4α}\right)$, όπου $Δ = β^2 - 4αγ$ και
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\dfrac{β}{2α}$

Στο προηγούμενο παράδειγμα από τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση διαπιστώσαμε ότι η παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$ έχει κορυφή το σημείο Κ(2, –1) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.

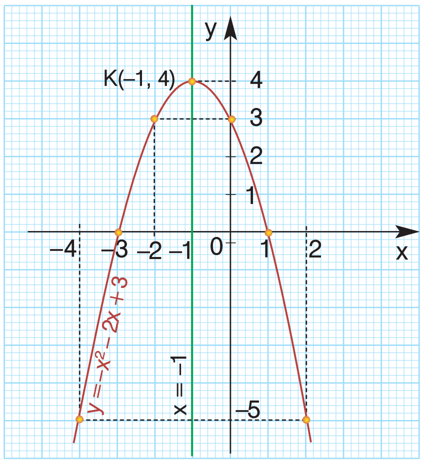
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από την προηγούμενη πρόταση, αφού

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ και } -\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = -1.$$

Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2 - 2x + 3$ είναι η παραβολή $y = -x^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες, έχει κορυφή το σημείο Κ(–1, 4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$, αφού

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1 \quad \text{και}$$

$$-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}{4 \cdot (-1)} = 4.$$



Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 - 4x + 3$ και $y = -x^2 - 2x + 3$, που σχεδιάσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, παρατηρούμε ακόμη ότι:

- Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x + 3$ που έχει $α > 0$ και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, –1) παίρνει ελάχιστη τιμή $y = -1$, όταν $x = 2$.
- Η συνάρτηση $y = -x^2 - 2x + 3$ που έχει $α < 0$ και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(–1, 4) παίρνει μέγιστη τιμή $y = 4$, όταν $x = -1$.

Γενικά

- Αν **$α > 0$,** η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = -\dfrac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\dfrac{β}{2α}$
- Αν **$α < 0$,** η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = -\dfrac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\dfrac{β}{2α}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

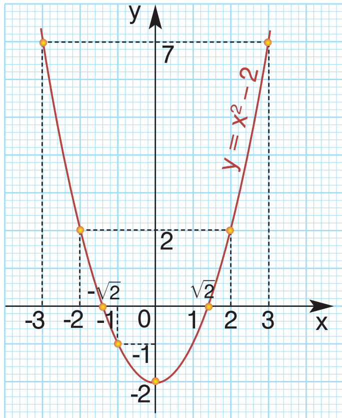
1 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2$ και να βρεθούν τα κοινά της σημεία με τον άξονα $x'x$.

Λύση

Η συνάρτηση $y = x^2 - 2$ είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = 1$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, οπότε έχουμε $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0$ και $-\dfrac{\Delta}{4\alpha} = -\dfrac{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}{4 \cdot 1} = -2$.

Άρα η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(0, –2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$, δηλαδή τον άξονα $y'y$.
Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	7	2	–1	–2	–1	2	7

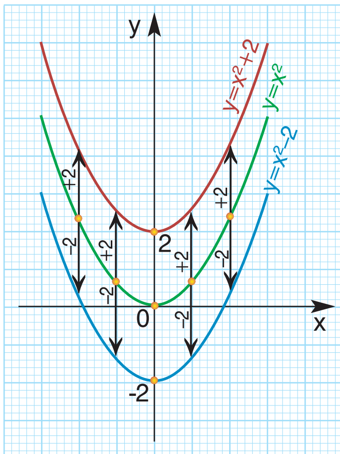


Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2 - 2$ με τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ (τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη 0) και έχουμε $x^2 - 2 = 0$ ή $x^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$. Άρα, τα κοινά σημεία της παραβολής και του άξονα $x'x$ είναι τα $A(-\sqrt{2}, 0)$ και $B(\sqrt{2}, 0)$.

Παρατήρηση

Η παραβολή $y = x^2 - 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, –2), μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα κάτω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).

Ομοίως, η παραβολή $y = x^2 + 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, 2) μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα πάνω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).



2 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (x - 2)^2$ και να βρεθεί το κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$.

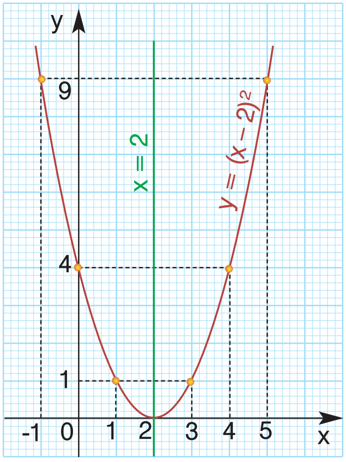
Λύση

Η συνάρτηση $y = (x-2)^2$ γράφεται $y = x^2 - 4x + 4$ και είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = 4$, οπότε έχουμε:

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ και } -\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 0.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, 0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.

Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

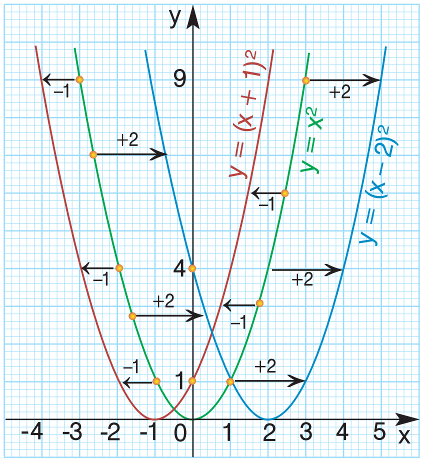


x	–1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9

Για να βρούμε το κοινό σημείο της παραβολής $y = (x - 2)^2$ με τον άξονα y′y, θέτουμε $x = 0$ (τα σημεία του άξονα y′y έχουν τετμημένη 0), οπότε έχουμε $y = (0 - 2)^2 = 4$. Άρα, το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y′y είναι Α(0, 4).

Παρατήρηση:

Η παραβολή $y = (x - 2)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(2, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει κατακορυφή μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).



Ομοίως, η παραβολή $y = (x + 1)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(–1, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).

3 **Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x$ και να προσδιοριστούν οι τιμές του x για τις οποίες είναι $y < 0$.**

Λύση

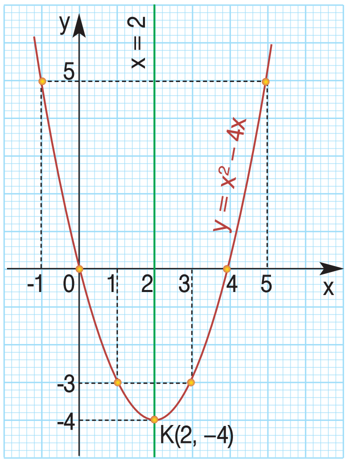
Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x$ είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α = 1$, $β = -4$ και $γ = 0$, οπότε έχουμε $-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ και $-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -4$.

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, –4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.

Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	–3	–4	–3	0	5

Σχεδιάζουμε την παραβολή και παρατηρούμε ότι τα σημεία της που έχουν τεταγμένη y αρνητική είναι εκείνα που έχουν τετμημένη x μεταξύ των αριθμών 0 και 4. Άρα, είναι $y < 0$, όταν $0 < x < 4$.



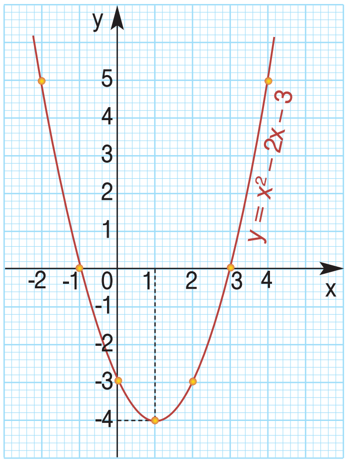
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x - 3$. Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η γραφική παράσταση είναι .... με κορυφή το σημείο .... και άξονα συμμετρίας την ευθεία ....

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει .... τιμή $y =$ ...., όταν $x =$ ....

γ) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία ...., ... και τον άξονα y′y στο σημείο ....



2 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Η παραβολή $y = 4x^2 + 2$ έχει:

i) Κορυφή το σημείο

α) (4, 2) β) (0, 4) γ) (0, 2) δ) (2, 0)

ii) Άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση

α) $x = 2$ β) $y = 0$ γ) $x = 0$ δ) $y = 2$

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Η συνάρτηση $y = -2x^2 - 5x + 4$ παίρνει ελάχιστη τιμή. ☐

β) Η παραβολή $y = x^2 - x + 2$ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Α(0, 2). ☐

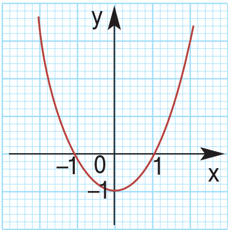
γ) Ο άξονας y′y είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = 3x^2 - 7$. ☐

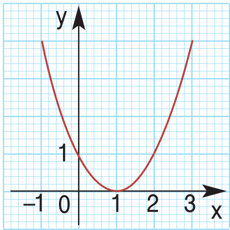
δ) Η κορυφή της παραβολής $y = (x + 1)^2$ είναι σημείο του άξονα x′x. ☐

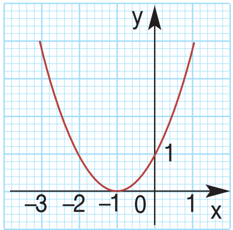
ε) Η κορυφή της παραβολής $y = x^2 + 2$ είναι σημείο του άξονα y′y. ☐

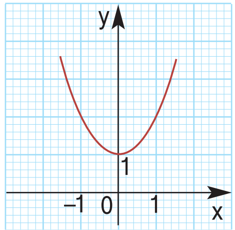
4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της.

1. $y = (x + 1)^2$ **2.** $y = x^2 - 1$ **3.** $y = x^2 + 1$ **4.** $y = (x - 1)^2$

α)


β)


γ)


δ)


α	β	γ	δ

5 Ορισμένες τιμές της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α < 0$ φαίνονται στον πίνακα.

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία .... και κορυφή το σημείο ....

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη τιμή y = ..., όταν x = ...

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία ...., ... και τον άξονα y′y στο σημείο ....

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y = x^2 + 2x - 3$ β) $y = -2x^2 + 4x + 6$

2 Να βρείτε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης:

α) $y = 3x^2 - 12x + 11$ β) $y = -4x^2 - 8x + 1$ γ) $y = -2(x - 6)^2 + 7$

3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + 2x$ για $-4 \leq x \leq 2$ και με τη βοήθεια αυτής να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $x^2 + 2x = 3$.

4 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x + 2$ και με τη βοήθεια αυτής να αποδείξετε ότι $x^2 + 2 > 2x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

5 Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 + 3x + \lambda$.

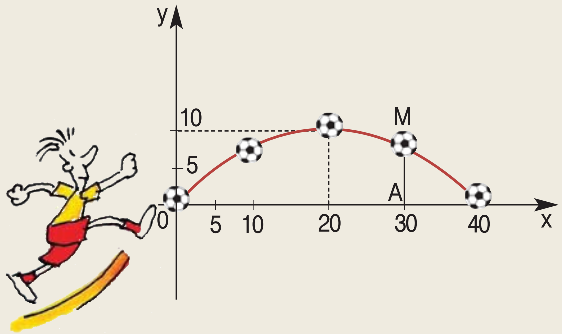
α) Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ το σημείο $Α(1, 6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης;

β) Αν $\lambda = 2$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-4 \leq x \leq 1$ και να βρείτε τα κοινά της σημεία με τους άξονες.

6 Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = x^2 - 6x + 5$. Αν Α, Β, Γ είναι τα κοινά της σημεία με τους άξονες, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

7 Να βρείτε τους αριθμούς β και γ, ώστε η συνάρτηση $y = x^2 + \beta x + \gamma$ για $x = 4$ να παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = -7$.

8 Ένας ποδοσφαιριστής έδιωξε την μπάλα από το σημείο Ο, η οποία αφού διέγραψε μια παραβολική τροχιά με μέγιστο ύψος 10 m έφτασε σε απόσταση 40 m.



α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$, με $0 \leq x \leq 40$.

β) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το έδαφος, όταν αυτή βρισκόταν στο σημείο Μ, που έχει τετμημένη 30 και σε ποιο άλλο σημείο της τροχιάς η μπάλα απείχε από το έδαφος την ίδια απόσταση;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $9y^2 = 4x^4$ παριστάνει δύο παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$, τις οποίες και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

2 Να βρείτε την τιμή του α, ώστε οι εξισώσεις $y = (2\alpha - 1)x^2$ και $y = (1 - 4\alpha^2)x^2$ να παριστάνουν παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

3 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -x^2$, $y = 2x - 3$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.

4 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή το σημείο $Κ(2, -3)$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $Α(0, 5)$.

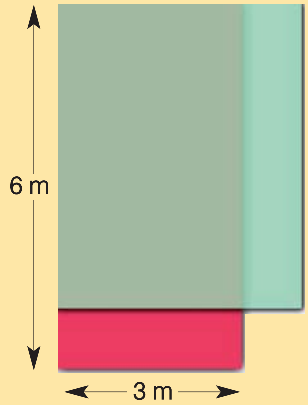
5 Το άθροισμα των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι 10 cm.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν y του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του ΑΒ = x είναι $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$, με $0 < x < 10$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

6 Ένα κατάστημα σχήματος ορθογωνίου αρχικά σχεδιάστηκε, να κατασκευαστεί με μήκος 6 m και πλάτος 3 m. Η αρχιτέκτων όμως, προκειμένου να μεγαλώσει τη βιτρίνα του καταστήματος σκέφτηκε να μειώσει το μήκος του και ταυτόχρονα να αυξήσει το πλάτος του κατά τα ίδια μέτρα.
Ποια πρέπει να είναι η μεταβολή κάθε διάστασης, ώστε το εμβαδόν να γίνει μέγιστο;

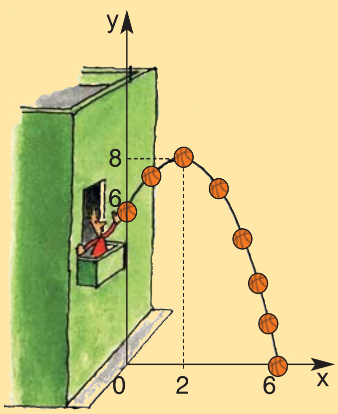


7 Σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm παίρνουμε σημείο Μ και κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΜΓΔ και ΒΜΕΖ. Πού πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων να γίνει ελάχιστο;

8 Από το μπαλκόνι ενός σπιτιού και από ύψος 6 m από το έδαφος πετάμε μία μπάλα, η οποία διαγράφει παραβολική τροχιά με μέγιστο ύψος από το έδαφος 8 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η μπάλα προσκρούσει στο έδαφος σ' ένα σημείο που απέχει 6 m από το πεζοδρόμιο, τότε:

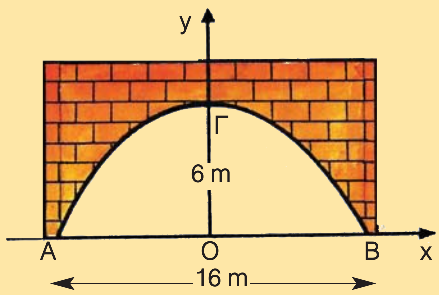
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της τροχιάς της μπάλας στο σύστημα αξόνων που φαίνεται στο σχήμα είναι $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$, με $0 \leq x \leq 6$.

β) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το σημείο ρίψης όταν κατά την κάθοδό της βρισκόταν και πάλι σε ύψος 6 m από το έδαφος;



9 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάθετη τομή μιας σήραγγας που κατασκευάστηκε σε σχήμα παραβολής με μέγιστο πλάτος ΑΒ = 16 m και μέγιστο ύψος ΟΓ = 6 m.

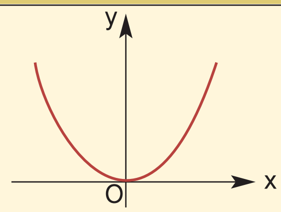
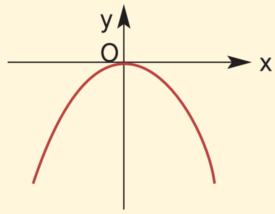
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής στο σύστημα αξόνων του σχήματος είναι $y = -\frac{3}{32}x^2 + 6$, με $-8 \leq x \leq 8$.



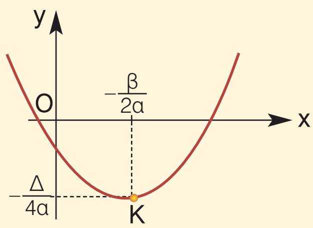
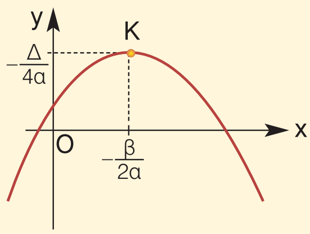
β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος ενός φορτηγού που μπορεί να διασχίσει τη σήραγγα, όταν το πλάτος του φορτηγού είναι 3,2 m και ο δρόμος είναι μιας κατεύθυνσης.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

α) Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$

Κορυφή	Άξονας συμμετρίας	Συντελεστής	Γραφική παράσταση	Μέγιστη ή Ελάχιστη Τιμή
$(0, 0)$	$x = 0$	$α > 0$		Η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$
		$α < 0$		Η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$

β) Η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

Κορυφή	Άξονας συμμετρίας	Συντελεστής	Γραφική παράσταση	Μέγιστη ή Ελάχιστη Τιμή
$\left(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α}\right)$	$x = -\frac{β}{2α}$	$α > 0$		Η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = -\frac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\frac{β}{2α}$
		$α < 0$		Η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = -\frac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\frac{β}{2α}$