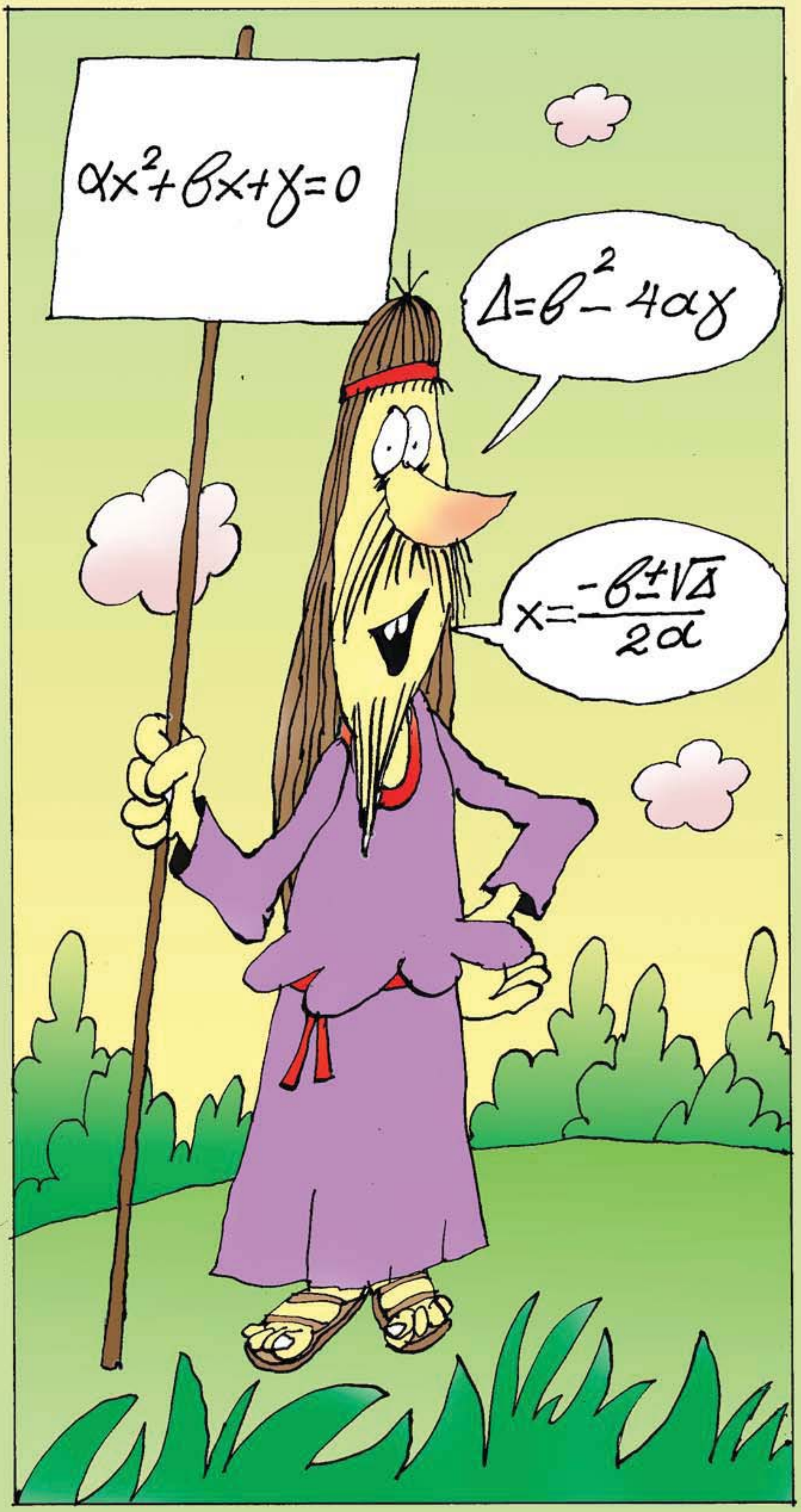
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ



2.1 Η εξίσωση αx + β = 0

✓ *Θυμάμαι πώς λύνονται οι εξισώσεις πρώτου βαθμού.*

✓ *Αναγνωρίζω αν μια εξίσωση έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

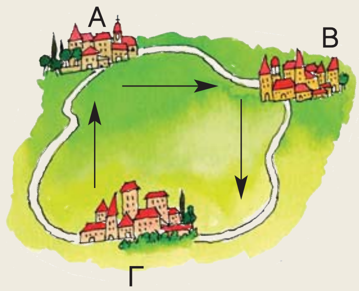
Ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το χωριό Α και αφού επισκεφθεί διαδοχικά τα χωριά Β και Γ, επιστρέφει στο χωριό Α. Η διαδρομή ΒΓ είναι 1 km μεγαλύτερη από την ΑΒ και η ΓΑ είναι 1 km μεγαλύτερη από τη ΒΓ.

Μπορείτε να υπολογίσετε πόσο απέχουν τα χωριά μεταξύ τους, αν γνωρίζετε ότι η συνολική απόσταση που διήνυσε ο ταχυδρόμος ήταν:

α) 15 km;

β) το τριπλάσιο της πρώτης διαδρομής;

γ) το τριπλάσιο της δεύτερης διαδρομής;



Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις, όπως $3x = 12$, $-4y + 11 = 0$, κ.τ.λ. Στις εξισώσεις αυτές υπάρχει ένας άγνωστος και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 1. Σε καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο (πρωτοβάθμια εξίσωση)**.

Η εξίσωση $3x = 12$, της οποίας ο συντελεστής του αγνώστου είναι διάφορος του μηδενός επαληθεύεται για **μία μόνο** τιμή του αγνώστου, την $x = 4$. Ο αριθμός 4, που επαληθεύει την εξίσωση $3x = 12$, ονομάζεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

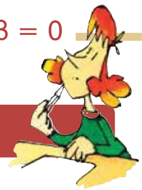
Υπάρχουν όμως και εξισώσεις, όπως οι $0x = -3$ ή $0x = 0$, στις οποίες ο συντελεστής του αγνώστου είναι μηδέν.

Η εξίσωση $0x = -3$ δεν επαληθεύεται για καμιά τιμή του x, αφού το γινόμενο $0x$ είναι πάντοτε ίσο με το μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -3. Μια τέτοια εξίσωση, που δεν έχει λύση, ονομάζεται **αδύνατη**.

Η εξίσωση όμως, $0x = 0$ επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του x και ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι:

- Αν **$\alpha \neq 0$**, τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ έχει **μοναδική λύση** την $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$
- Αν **$\alpha = 0$**, τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ γράφεται $0x = -\beta$ και
  - αν **$\beta \neq 0$**, δεν έχει λύση (**αδύνατη**), ενώ
  - αν **$\beta = 0$**, κάθε αριθμός είναι λύση της (**ταυτότητα ή αόριστη**).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x + 1$

Λύση

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές.
- Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x + 1$$

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{2x+1}{6} = 6 \cdot x + 6 \cdot 1$$

$$3(x-1) - (2x+1) = 6x + 6$$

$$3x - 3 - 2x - 1 = 6x + 6$$

$$3x - 2x - 6x = 6 + 3 + 1$$

$$-5x = 10$$

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{10}{-5}$$

$$x = -2$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -2$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3(x+2) - 3 = 3x + 5$ β) $2(x-1) - x = x - 2$

Λύση

α) $3(x+2) - 3 = 3x + 5$

$$3x + 6 - 3 = 3x + 5$$

$$3x - 3x = 5 - 6 + 3$$

$$0x = 2$$

Η εξίσωση αυτή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x, οπότε είναι **αδύνατη**.

β) $2(x-1) - x = x - 2$

$$2x - 2 - x = x - 2$$

$$2x - x - x = 2 - 2$$

$$0x = 0$$

Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του x, οπότε είναι **ταυτότητα**.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση της στήλης Α το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $3x = 7$	1. Έχει μοναδική λύση
β. $0x = 0$	2. Είναι αδύνατη
γ. $0x = 5$	3. Είναι ταυτότητα
δ. $5x = 0$	

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $\frac{1}{3}x = 2$ έχει λύση την $x = 6$. ☐

β) Η εξίσωση $4x = 0$ είναι αδύνατη. ☐

γ) Η εξίσωση $0x = 0$ έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό. ☐

δ) Η εξίσωση $0x = 6$ έχει λύση την $x = 6$. ☐

ε) Η εξίσωση $5(x + 1) = 5x + 5$ είναι ταυτότητα. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-3(x + 2) - 2(x - 1) = 8 + x$

β) $4y - 2(y - 3) = 2y + 1$

γ) $5(-\omega + 2) - 4 = 6 - 5\omega$

δ) $(2x + 1)^2 + 5 = 4(x^2 - 10)$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = x - \frac{1}{3}$

β) $\frac{y+5}{5} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{3y}{10}$

γ) $\frac{2(\omega - 1)}{3} - \frac{\omega + 1}{2} = \frac{\omega - 5}{6}$

δ) $0{,}2(3x - 4) - 5(x - 0{,}4) = 0{,}4(1 - 10x)$

3 Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττούμενο κατά 5 είναι ίσο με το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 10. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

4 Ρώτησαν κάποιον πόσα ευρώ έχει στο πορτοφόλι του κι εκείνος απάντησε: «*Αν είχα όσα έχω και τα μισά ακόμα και δέκα παραπάνω, θα είχα εκατό*». Μπορεί, άραγε, με τα χρήματα αυτά να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει 65 €;

5 Ο καθηγητής των Μαθηματικών είπε στους μαθητές του:

– Σκεφτείτε έναν αριθμό και διπλασιάστε τον.
– Στο αποτέλεσμα να προσθέσετε τον αριθμό 10.
– Το άθροισμα που βρήκατε να το διαιρέσετε με το 2 και από το πηλίκο να αφαιρέσετε τον αριθμό που σκεφτήκατε αρχικά.
– Κάθε μαθητής πρέπει να έχει βρει αποτέλεσμα τον αριθμό 5, ανεξάρτητα από ποιον αριθμό σκέφτηκε αρχικά.

Μπορείτε να εξηγήσετε τον ισχυρισμό του καθηγητή;

6 Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και κινείται προς την πόλη Β με μέση ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Α για να τον συναντήσει. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν;

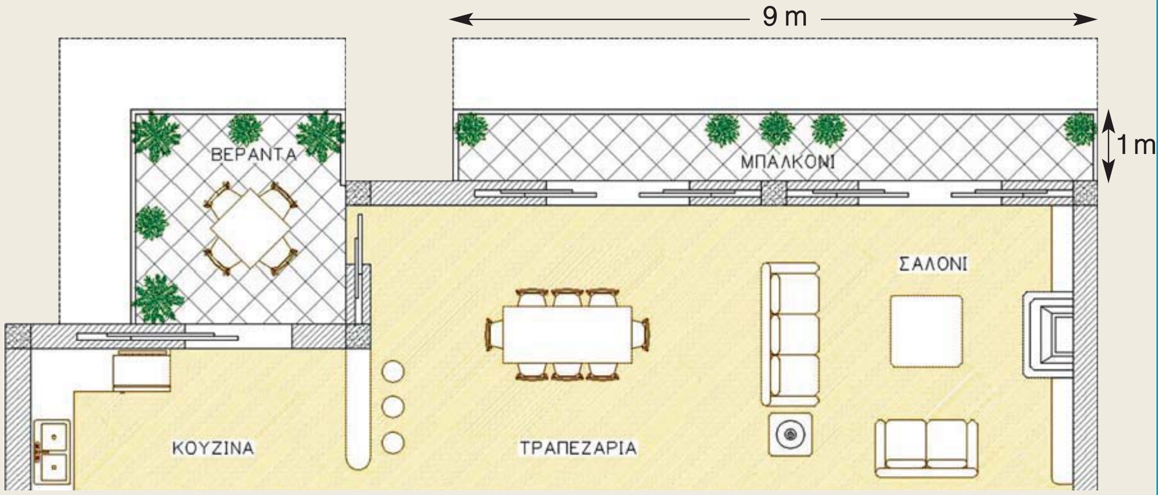
2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

- ✓ *Λύνω εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.*
- ✓ *Βρίσκω το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και υπολογίζω τις λύσεις της με τη βοήθεια τύπου.*
- ✓ *Μετατρέπω ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε μια οικοδομή και στην πρόσοψή της προέβλεψε την κατασκευή μιας τετραγωνικής βεράντας και ενός ορθογωνίου μπαλκονιού με διαστάσεις 9 m και 1 m. Στο σχέδιο που παρουσίασε στον ιδιοκτήτη της οικοδομής η βεράντα και το μπαλκόνι είχαν το ίδιο εμβαδόν.

α) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα ήταν η πλευρά της βεράντας.



Ο ιδιοκτήτης όμως, θεώρησε στενό το μπαλκόνι και ζήτησε από το μηχανικό να αυξήσει το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας κατά τα ίδια μέτρα, ώστε να έχουν και πάλι το ίδιο εμβαδόν.

β) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Με το αίτημα όμως του ιδιοκτήτη, το συνολικό εμβαδόν της βεράντας και του μπαλκονιού ξεπερνούσε το όριο που καθορίζεται από τον πολεοδομικό κανονισμό. Τελικά, αποφασίστηκε να μεγαλώσει η βεράντα και το μπαλκόνι, όπως το ζήτησε ο ιδιοκτήτης, με την προϋπόθεση όμως να μην έχουν πια το ίδιο εμβαδόν, αλλά να καλύπτουν συνολικά 34 m^2.

γ) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα αυξήθηκε τελικά το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$x^2 = 9,$

$x^2 - 3x = 0,$

$x^2 + 15x - 16 = 0$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση)**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**. Οι συντελεστές σε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$x^2 - 9 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\gamma = -9$
$x^2 - 3x = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = -3$	$\gamma = 0$
$x^2 + 15x - 16 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 15$	$\gamma = -16$

Α Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι: **Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$**

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $x(x - 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$$x^2 = 3x$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:
- Το α' μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β' μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $(x - 3)(x + 3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 - 3^2 = 0$$
$$(x - 3)(x + 3) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 3 = 0$$
$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

2ος τρόπος:

- Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = α$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x = \sqrt{9} \quad &ή \quad x = -\sqrt{9} \\ x = 3 \quad &ή \quad x = -3 \end{aligned}$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -16.

Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = α$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί η εξίσωση $x^2=0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$
- Για να είναι $(3x - 1)^2 = 0$ πρέπει $3x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6x + 1 &= 0 \\ (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 &= 0 \\ (3x - 1)^2 &= 0 \\ 3x - 1 = 0 \quad ή \quad x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ σχηματίζουμε στο α′ μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β′ μέλος το σταθερό όρο και στο α′ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$ ή $α^2 - 2αβ$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
  $α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$
  $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$

$$\begin{aligned} x^2 + 15x - 16 &= 0 \\ 4x^2 + 60x - 64 &= 0 \\ (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 &= 64 \\ (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 &= 64 + 15^2 \\ (2x + 15)^2 &= 289 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 15 = \sqrt{289} \quad &ή \quad 2x + 15 = -\sqrt{289} \\ 2x + 15 = 17 \quad &ή \quad 2x + 15 = -17 \\ 2x = 2 \quad &ή \quad 2x = -32 \\ x = 1 \quad &ή \quad x = -16 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 75 = 0$ γ) $2x^2 + 8 = 0$

Λύση

α)
$$\begin{aligned} 2x^2 &= 7x \\ 2x^2 - 7x &= 0 \\ x(2x-7) &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } 2x - 7 &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 \\ 3x^2 &= 75 \\ x^2 &= 25 \\ x = \sqrt{25} \text{ ή } x &= -\sqrt{25} \\ x = 5 \quad \text{ή } x &= -5 \end{aligned}$$

γ)
$$\begin{aligned} 2x^2 + 8 &= 0 \\ 2x^2 &= -8 \\ x^2 &= -4 \end{aligned}$$

Δεν έχει λύση
(αδύνατη εξίσωση)

2 Να λυθεί η εξίσωση $x^2(2x-1) - 6x(2x-1) + 9(2x-1) = 0$

Λύση

- Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$.
- Ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$\begin{aligned} x^2(2x-1) - 6x(2x-1) + 9(2x-1) &= 0 \\ (2x-1)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ (2x-1)(x-3)^2 &= 0 \\ 2x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 &= 0 \\ x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x &= 3 \text{ (διπλή λύση)} \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$. ☐
β) Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$. ☐
γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $(x-2)(x+1) = 0$ είναι $x = 2$ και $x = -1$. ☐
δ) Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 4$. ☐
ε) Η εξίσωση $x^2 = -9$ δεν έχει λύση. ☐
στ) Η εξίσωση $(x-2)^2 = 0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x = 2$. ☐

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $5x - 6 = x^2$ είναι 2ου βαθμού. ☐
β) Η εξίσωση $x^2 + 3x + 8 = x(x+2)$ είναι 2ου βαθμού. ☐
γ) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι
  i) 1ου βαθμού, όταν $\lambda = 2$ ☐
  ii) 2ου βαθμού, όταν $\lambda \neq 2$. ☐

3 Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-4)(x+1)=0$ β) $y(y+5)=0$ γ) $(3-\omega)(2\omega+1)=0$

δ) $7x(x-7)=0$ ε) $3y\left(\frac{y}{3}-2\right)=0$ στ) $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1)=0$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2=7x$ β) $-y^2=9y$ γ) $2\omega^2-72=0$

δ) $-2t^2-18=0$ ε) $-0{,}2\varphi^2+3{,}2=0$ στ) $\frac{z^2}{6}-0{,}5z=0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x-1)^2-1=0$ β) $3(x+2)^2=12$ γ) $(x+1)^2=2x$

δ) $\frac{(x-9)^2}{3}=27$ ε) $(3x-1)^2-4x^2=0$ στ) $(x+\sqrt{3})^2-3=0$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x+1)^2=5(3x+1)$ β) $0{,}5(1-y)^2=18$ γ) $(2\omega^2+1)(\omega^2-16)=0$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x-4)=-4$ β) $y^2+y-12=0$ γ) $\omega^2-2\omega-15=0$

δ) $2t^2-7t+6=0$ ε) $3\varphi^2+1=4\varphi$ στ) $5z^2-3z-8=0$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $25x^2+10x+1=0$ β) $y^2(y-2)+4y(y-2)+4y-8=0$

γ) $\omega^2+2006\omega-2007=0$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ β) $x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$

8

	1	2	3	4	5
1			■		
2		■			■
3	■			■	
4			■		

Οριζόντια:

1. Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $x^2=12x$
   – Ρίζα της εξίσωσης $x^2+225=30x$
2. Γινόμενο ριζών της εξίσωσης $x(x+4)+8(x+4)=0$
3. Άθροισμα ριζών της εξίσωσης $x^2-10x+9=0$
4. Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $x^2=25$
   – Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2=32x$

Κάθετα:

1. Ρίζα της εξίσωσης $x^2-20x+100=0$
2. Το ακέραιο πηλίκο των ριζών της εξίσωσης $x(x-15)=x-15$
3. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $(x-5)^2-(x-5)=0$
4. Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^2-144=0$
5. Ρίζα της εξίσωσης $x^2(x-12)+2007(x-12)=0$

B Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$αx^2 + βx + γ = 0$$

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α.

$$4α \cdot αx^2 + 4α \cdot βx + 4α \cdot γ = 0$$

- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β′ μέλος.

$$4α^2x^2 + 4αβx = -4αγ$$

- Στο α′ μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2αx + β)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2αx + β$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.

$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β = -4αγ$$
$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β + β^2 = β^2 - 4αγ$$
$$(2αx + β)^2 = β^2 - 4αγ$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $β^2 - 4αγ$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται $(2αx + β)^2 = Δ$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $Δ > 0$, τότε έχουμε:

  $2αx + β = \pm\sqrt{Δ}$

  $2αx = -β \pm \sqrt{Δ}$

  $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$

  Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \dfrac{-β + \sqrt{Δ}}{2α}$ και $x = \dfrac{-β - \sqrt{Δ}}{2α}$

- Αν $Δ = 0$, τότε έχουμε:

  $(2αx + β)^2 = 0$

  $2αx + β = 0$

  $2αx = -β$

  $x = -\dfrac{β}{2α}$

  Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = -\dfrac{β}{2α}$

- Αν $Δ < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (**αδύνατη**).

  Η παράσταση $β^2 - 4αγ$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της. Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ, δηλαδή

$$\boldsymbol{Δ = β^2 - 4αγ}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$.

- Αν $Δ > 0$, έχει **δύο άνισες λύσεις** τις $x = \dfrac{-β \pm\sqrt{Δ}}{2α}$
- Αν $Δ = 0$, έχει **μία διπλή λύση** την $x = -\dfrac{β}{2α}$
- Αν $Δ < 0$, **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $α = 2$, $β = 5$, $γ = 3$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-5 \pm 1}{4}$,

δηλαδή είναι $x = \dfrac{-5 + 1}{4} = -1$ ή $x = \dfrac{-5 - 1}{4} = -\dfrac{3}{2}$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $α = 6$, $β = -5$, $γ = 2$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0$.

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι $α = -16$, $β = 8$, $γ = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = -\dfrac{β}{2α} = -\dfrac{8}{2 \cdot (-16)} = \dfrac{1}{4}$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$ β) $\dfrac{x(x + 3)}{3} - \dfrac{x - 6}{6} = \dfrac{1}{2}$

Λύση

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$

$9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) = 2x$

$9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x = 0$

$-16x^2 + 8x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{4}$ (διπλή λύση)

(Παράδειγμα 1γ)

β) $\dfrac{x(x + 3)}{3} - \dfrac{x - 6}{6} = \dfrac{1}{2}$

$6 \cdot \dfrac{x(x + 3)}{3} - 6 \cdot \dfrac{x - 6}{6} = 6 \cdot \dfrac{1}{2}$

$2x(x + 3) - (x - 6) = 3$

$2x^2 + 6x - x + 6 - 3 = 0$

$2x^2 + 5x + 3 = 0$

$x = -1$ ή $x = -\dfrac{3}{2}$ *(Παράδειγμα 1α)*

3 α) Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι $α = 2$, $β = -8$, $γ = 6$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$ ή $x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm 4}{4}$,

δηλαδή είναι $x = 3$ ή $x = 1$.

β) $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = 2\left[x(x - 3) - (x - 3)\right] =$
$= 2(x - 3)(x - 1)$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι:

- Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί 3 και 1.
- Το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:
  $2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 3)(x - 1)$

Γενικά

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις -1 και $-\frac{3}{2}$ *(παράδειγμα 1α)*.
Άρα το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 3$ γράφεται

$$2x^2 + 5x + 3 = 2[x - (-1)]\left[x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right] = 2(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Ομοίως η εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{4}$ *(παράδειγμα 1γ)*.

Άρα το τριώνυμο $-16x^2 + 8x - 1$ γράφεται

$$-16x^2 + 8x - 1 = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\Delta > 0$	1. Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.
β. $\Delta = 0$	2. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. $\Delta \geq 0$	3. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ. $\Delta < 0$	4. Η εξίσωση δεν έχει λύση.

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση. ☐

β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση. ☐

γ) Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -3, οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$. ☐

3 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με τη βοήθεια του τύπου

α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 2x + 8 = 0$ γ) $-2x^2 + 50 = 0$ δ) $5x^2 + x - 4 = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $αx^2 + βx + γ = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Εξίσωση	$αx^2 + βx + γ = 0$	α	β	γ
$x(x - 1) = -2$				
$3x^2 + 4 = 2(x + 2)$				
$(x - 1)^2 = 2(x^2 - x)$				

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$ β) $4y^2 + 3y - 1 = 0$ γ) $-2ω^2 + ω + 6 = 0$

δ) $2z^2 - 3z + 1 = 0$ ε) $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ στ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

ζ) $3x^2 + 18x + 27 = 0$ η) $x^2 - 4x = 5$ θ) $x^2 - 3x + 7 = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2 - 7x = 0$ β) $x^2 - 16 = 0$

i) με τη βοήθεια του τύπου ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$ β) $(y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3)$

γ) $(2ω - 3)^2 - (ω - 2)^2 = 2ω^2 - 11$ δ) $φ(8 - φ) - (3φ + 1)(φ + 2) = 1$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2 - 1}{3} - \dfrac{x + 3}{5} = x - 2$ β) $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{6y + 1}{4} = \dfrac{y - 2}{6} - 2$

γ) $0{,}5t^2 - 0{,}4(t + 2) = 0{,}7(t - 2)$ δ) $\dfrac{ω}{2}(\sqrt{3}ω - 7) = -\sqrt{3}$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 4x - 12$ β) $3y^2 - 8y + 5$ γ) $-2ω^2 + 5ω - 3$

δ) $x^2 - 16x + 64$ ε) $9y^2 + 12y + 4$ στ) $-ω^2 + 10ω - 25$

7 Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $α \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση

α) $αx^2 - x + 1 - α = 0$ β) $αx^2 + (α + β)x + β = 0$

8 Δίνεται η εξίσωση $(α + γ)x^2 - 2βx + (α - γ) = 0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):

« *Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου*».

Τους λαούς της Μεσοποταμίας δεν τους απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι' αυτό πρόσθεταν μήκος με επιφάνεια).

Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 - x = 870$.

Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$.
- Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$, αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$.
- Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα βρεις $870\frac{1}{4}$.
- Το $870\frac{1}{4}$, είναι το τετράγωνο του $29\frac{1}{2}$.
- Πρόσθεσε στο $29\frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.

- Το 1 είναι ο συντελεστής του x. (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).
- Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.
- Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχει πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;

- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»

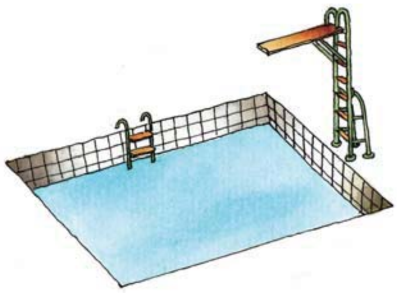
(*)(Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: *Ιστορία των Μαθηματικών*, *Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*, τόμος Α΄, Αθήνα 1997.

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της Οικονομίας, της Φυσικής κ.τ.λ.

Πρόβλημα 1ο

Το εμβαδόν μια κολυμβητικής πισίνας είναι 400 m². Να βρείτε τις διαστάσεις της, αν αυτές έχουν άθροισμα 41 m.



Λύση

Αν η μία διάσταση της πισίνας είναι x, τότε η άλλη θα είναι 41 – x, αφού το άθροισμά τους είναι 41 m. Επειδή το εμβαδόν της πισίνας είναι 400 m², έχουμε την εξίσωση

$x(41 - x) = 400$ ή $41x - x^2 = 400$ ή $x^2 - 41x + 400 = 0$.

Στην εξίσωση αυτή είναι $α = 1$, $β = -41$, $γ = 400$, οπότε η διακρίνουσα είναι

$Δ = β^2 - 4αγ = (-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 1681 - 1600 = 81 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \dfrac{41 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \dfrac{41 \pm 9}{2}$,

δηλαδή είναι $x = 25$ ή $x = 16$.

Αν $x = 25$, τότε $41 - x = 41 - 25 = 16$, ενώ αν $x = 16$, τότε $41 - x = 41 - 16 = 25$.

Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις οι διαστάσεις της πισίνας είναι 25 m και 16 m.

Πρόβλημα 2ο

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει $\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500$ ευρώ. Αν η βιοτεχνία πουλάει κάθε πουκάμισο 60 €, πόσα πουκάμισα πρέπει να πουλήσει, ώστε να κερδίσει 3500 €;

Λύση

Αν η βιοτεχνία πουλήσει x πουκάμισα, θα εισπράξει 60x €, οπότε θα κερδίσει $60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500\right)$ €.

Επειδή θέλουμε το κέρδος να είναι 3500 € έχουμε την εξίσωση

$$60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500\right) = 3500 \quad ή$$

$$60x - \frac{1}{10}x^2 - 20x - 500 = 3500$$

$$600x - x^2 - 200x - 5000 = 35000$$

$$x^2 - 400x + 40000 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-400)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40000 = 160000 - 160000 = 0.$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{400}{2 \cdot 1} = 200.$

Επομένως, για να κερδίσει η βιοτεχνία 3500 €, πρέπει να πουλήσει 200 πουκάμισα.

Πρόβλημα 3ο

Από ένα ακίνητο αερόστατο που βρίσκεται σε ύψος h αφήνεται να πέσει ένας σάκος με άμμο για να ελαφρύνει. Ταυτόχρονα, το αερόστατο αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα άνω με σταθερή επιτάχυνση 0,5 m/sec². Τη στιγμή που ο σάκος φτάνει στο έδαφος, το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 84 m. Να βρεθεί πόσο διήρκησε η πτώση του σάκου.

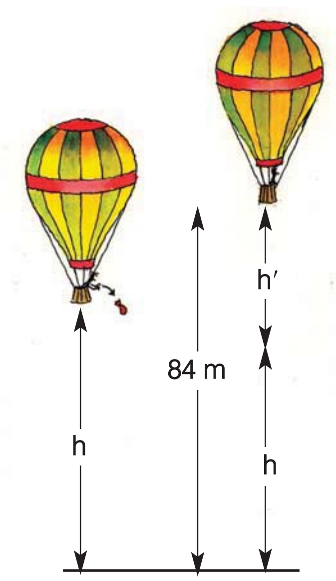
Σημείωση:
Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι:

- *Αν ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h m, τότε θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t sec, όπου* $h = \frac{1}{2}gt^2$ *και* $g = 10$ *m/sec² περίπου.*
- *Αν ένα σώμα αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση α, τότε σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα* $s = \frac{1}{2}at^2$.

Λύση

Αν η πτώση του σάκου διήρκησε t sec, τότε στο χρόνο αυτό ο σάκος διήνυσε απόσταση
$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10t^2 = 5t^2$, αφού $g = 10$ m/sec².

Στον ίδιο χρόνο το αερόστατο ανέβηκε κατά ύψος
$h' = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 = \frac{1}{4}t^2$, αφού $a = 0{,}5$ m/sec².

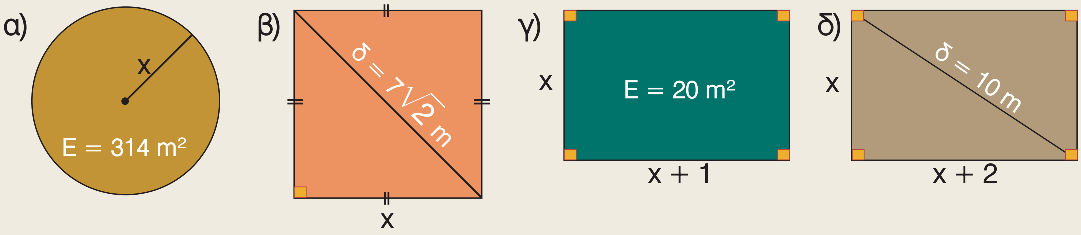


Επειδή $h + h' = 84$, έχουμε την εξίσωση
$5t^2 + \frac{1}{4}t^2 = 84$ ή $20t^2 + t^2 = 336$ ή $21t^2 = 336$

ή $t^2 = 16$, οπότε $t = 4$ ή $t = -4$.
Επειδή το t παριστάνει χρόνο, πρέπει $t > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η διάρκεια της πτώσης του σώματος ήταν $t = 4$ sec.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.



2 Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε:

α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιό του.

β) Το γινόμενό του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.

γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.

3 Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 2,5 dm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του. (1 λίτρο $= 1 dm^3$)

4 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2. Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματόπλεγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

5 Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

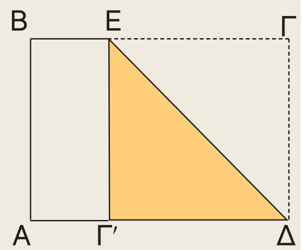
6 Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «*Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικρυστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506*». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;

7 Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

8 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x.

9 Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσο ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μια ακόμη φορά, αφού τους είπε:
«Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια, με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου, αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους βρίσκετε τον ίδιο αριθμό».
Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του;

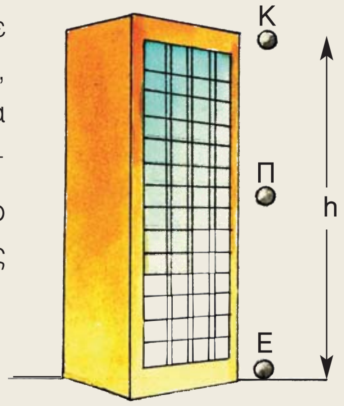
10 Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ, έτσι ώστε η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ, τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά τα $\frac{3}{8}$ του αρχικού εμβαδού του. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου του βιβλίου.



11 Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό συντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με βότσαλα ένα κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3 m. Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το συντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του συντριβανιού.

12 Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6 m, χρειάστηκαν 251,2 m² λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.

13 Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος, που αφέθηκε να πέσει από την κορυφή Κ ενός ουρανοξύστη, διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησής του διήνυσε μια απόσταση ΠΕ ίση με τα $\frac{5}{9}$ του ύψους του ουρανοξύστη. Να βρείτε πόσο χρόνο διήρκησε η πτώση του σώματος και ποιο ήταν το ύψος του ουρανοξύστη ($g = 10$ m/sec²).



2.4 Κλασματικές εξισώσεις

✓ *Μαθαίνω να λύνω κλασματικές εξισώσεις, που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου βαθμού.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{4} + \frac{4}{3} = \frac{x+8}{12}$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των $x + 2$, x, $x^2 + 2x$ και να λύσετε και την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}.$$

Επαληθεύεται η εξίσωση από όλες τις τιμές του x που βρήκατε;

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή και η οποία ονομάζεται **κλασματική** εξίσωση.

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{6},$$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.
Τις κλασματικές εξισώσεις τις επιλύουμε όπως και τις υπόλοιπες εξισώσεις που έχουν παρονομαστή γνωστό αριθμό.

Για παράδειγμα, προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x(x+2)}$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

Πρέπει $x \neq 0$ και $x + 2 \neq 0$
δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x+2) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$x(x+2)\frac{x}{x+2} + x(x+2)\frac{4}{x} = x(x+2)\frac{x+8}{x(x+2)}$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$x^2 + 4(x + 2) = x + 8$
$x^2 + 4x + 8 = x + 8$ ή $x^2 + 3x = 0$ ή
$x(x + 3) = 0$, άρα $x = 0$ ή $x = -3$.

Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Η λύση $x = 0$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{8}{x} = 1$ β) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x^2-2x}$

Λύση

α) Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x + 1) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται

$$x(x+1)\cdot\frac{x}{x+1} - x(x+1)\cdot\frac{8}{x} = x(x+1)\cdot 1$$

$x^2 - 8(x + 1) = x(x + 1)$ ή $x^2 - 8x - 8 = x^2 + x$ ή $-9x = 8$ ή $x = -\dfrac{8}{9}$

(ικανοποιεί τους περιορισμούς). Άρα η εξίσωση έχει λύση την $x = -\dfrac{8}{9}$

β) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και η εξίσωση γίνεται $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-2)}$ (1).

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x - 2) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x-2)\frac{1}{x-2} - x(x-2)\frac{1}{x} = x(x-2)\frac{2}{x(x-2)}$$

$x - (x - 2) = 2$ ή $x - x = 2 - 2$ ή $0x = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από τους αριθμούς 0 και 2.

2 **Ένας μαραθωνοδρόμος διήνυσε την απόσταση των 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του, διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;**

Λύση

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε ήταν x km/h, τότε την απόσταση των 42 km τη διήνυσε σε χρόνο $\frac{42}{x}$ ώρες. Αν η ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, δηλαδή (x + 1) km/h, τότε θα έκανε $\frac{42}{x+1}$ ώρες. Ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος από τον προηγούμενο κατά $\frac{1}{10}$ της ώρας, οπότε έχουμε την εξίσωση $\frac{42}{x} = \frac{42}{x+1} + \frac{1}{10}$ (1).

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $10x(x+1) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$10x(x+1) \cdot \frac{42}{x} = 10x(x+1) \cdot \frac{42}{x+1} + 10x(x+1) \cdot \frac{1}{10}$$

$420(x+1) = 420x + x(x+1)$ ή $420x + 420 = 420x + x^2 + x$ ή $x^2 + x - 420 = 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) = 1681 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 41}{2}$,

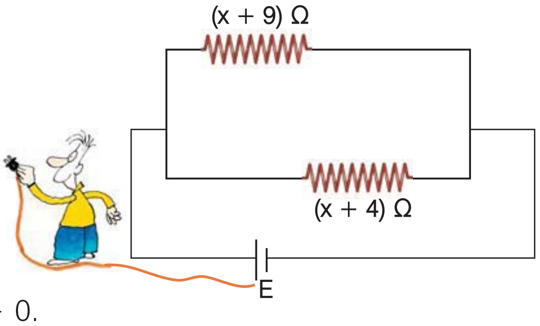
δηλαδή είναι $x = 20$ ή $x = -22$.

Επειδή $x > 0$, η μέση ταχύτητα του μαραθωνοδρόμου ήταν 20 km/h.

3 **Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα δύο αντιστάτες που συνδέονται παράλληλα έχουν αντιστάσεις αντίστοιχα 4Ω και 9Ω μεγαλύτερες από την ολική τους αντίσταση. Να βρεθεί η ολική αντίσταση του κυκλώματος.**

Σημείωση: *Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι, αν δύο αντιστάτες που έχουν αντιστάσεις R_1, R_2 συνδεθούν παράλληλα, τότε η ολική τους αντίσταση $R_{ολ}$ δίνεται από τον τύπο* $\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Λύση



Αν η ολική αντίσταση είναι x Ω, τότε οι δύο αντιστάσεις του κυκλώματος θα είναι (x + 4) Ω και (x + 9) Ω.

Άρα ισχύει $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x}$ (1)

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $x(x+4)(x+9) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x+4} + x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x+9} = x(x+4)(x+9) \cdot \frac{1}{x}$$

$x(x+9) + x(x+4) = (x+4)(x+9)$ ή $x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 4x + 9x + 36$ ή $x^2 = 36$ ή $x = \pm\sqrt{36}$. Άρα $x = 6$ ή $x = -6$.

Από τις δύο λύσεις της εξίσωσης μόνο η $x = 6$ είναι λύση του προβλήματος. Άρα η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι 6 Ω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$ ορίζονται αν $x \neq 0$ και $x \neq 1$. ☐

β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$. ☐

γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$, τότε αυτή γράφεται $5x + 3 = 2$. ☐

δ) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2+1} = x$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της. ☐

2 Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε $\frac{3}{4}$. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση;

α) $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$ γ) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$ δ) $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$

3 Η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$ έχει ως λύση τον αριθμό

α) $x = 1$ β) $x = -1$ γ) $x = 0$ δ) $x = 2$

4 Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση $2x - 1 = 1$ που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό $x = 1$. Η απάντησή του είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$ β) $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$ γ) $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$

δ) $\frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}$ ε) $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$ στ) $1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$ β) $\frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2$ γ) $\frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega + 2} = \frac{6}{\omega^2}$

δ) $\frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1$ ε) $\frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$ στ) $\frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5}$ β) $\frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$

γ) $\frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$ δ) $\frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2-y} = 0$ β) $\frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$

γ) $\frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4}$ δ) $1 + \frac{3\alpha}{\alpha-2} = \frac{\alpha+4}{\alpha^2-3\alpha+2}$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x}{x - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$ β) $\dfrac{1}{1 + \frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$

6 Να λύσετε τους τύπους:

α) $p = \frac{m}{V}$ ως προς V β) $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ ως προς R

γ) $R = \rho\frac{\ell}{S}$ ως προς S δ) $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ ως προς T_1

ε) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ως προς R στ) $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ ως προς α

ζ) $\frac{1}{u_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ ως προς u_α^2 η) $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ως προς λ

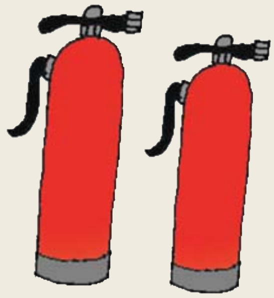
7 α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα $\frac{17}{4}$.

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ για να βρούμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$.

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

8 Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 €. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;

9 Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτιρίου και έδωσε 240 €. Πριν από λίγα χρόνια, που η τιμή κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.



10 Αναμειγνύουμε 12 gr ενός διαλύματος Α με 15 gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm^3 ενός διαλύματος Γ. Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι 0,2 gr/cm^3 μικρότερη.

11 Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας.

12 Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν από την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως, λόγω ολισθηρότητας του δρόμου, μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km/h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η χρυσή τομή

Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δύο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

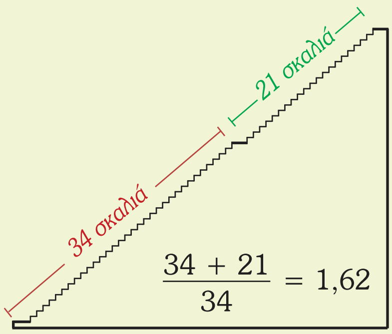
α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών $\dfrac{34+21}{34}$ και $\dfrac{34}{21}$.

Τι παρατηρείτε;

Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο;

Το προβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = λ σε δύο άνισα μέρη ΑΓ και ΓΒ, ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».



β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής εξίσωσης $\dfrac{\lambda}{x} = \dfrac{x}{\lambda - x}$ (1).

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ.

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\varphi = \dfrac{\lambda}{x}$ είναι ίσος με $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618...$

Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.

Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ, λέγεται **«χρυσό ορθογώνιο»** και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική.

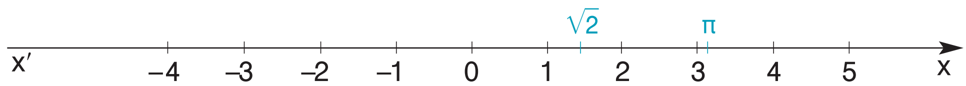
Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο $\dfrac{\alpha}{\beta} = \varphi$

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

✓ *Θυμάμαι πώς ορίζεται η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών.*
✓ *Μαθαίνω να αποδεικνύω και να χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της διάταξης.*
✓ *Θυμάμαι πώς λύνονται οι ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.*

Α Διάταξη πραγματικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο ενός άξονα. Αν στον άξονα έχουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα π.χ. $-2 > -4$, $\quad -3 < 2$, $\quad \pi > \sqrt{2}$.



Δύο ή περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί που έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα είναι **διατεταγμένοι**, οπότε μπορούμε να τους συγκρίνουμε.
Επομένως:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Πώς όμως θα συγκρίνουμε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός αξόνα;
Αν πάρουμε δύο αριθμούς. π.χ. τους 5 και 3, για τους οποίους ισχύει $5 > 3$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού $5 - 3 = 2 > 0$.

Ομοίως, οι αριθμοί –2 και –4, για τους οποίους ισχύει $-2 > -4$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά ένα θετικό αριθμό, αφού $(-2) - (-4) = -2 + 4 = 2 > 0$.

Αντίθετα, οι αριθμοί 3 και 5 ή –4 και –2, για τους οποίους ισχύει $3 < 5$ και $-4 < -2$, παρατηρούμε ότι έχουν διαφορά έναν αρνητικό αριθμό, αφού $3 - 5 = -2 < 0$ και $(-4) - (-2) = -4 + 2 = -2 < 0$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ ενώ **Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$**

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο πραγματικούς αριθμούς α και β, που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους α – β και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$
- Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
- Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

Β Ιδιότητες της διάταξης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αφού διατάξετε τους αριθμούς 0, 8, –2, 4, –5, τότε:

1. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς προσθέσετε τον αριθμό 3

2. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν
- i) αφαιρέσετε τον αριθμό 3
- ii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό 2
- iii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό –2

Σε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις η φορά των ανισοτήτων διατηρείται και σε ποια αλλάζει;

Ο ορισμός της διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών χρησιμοποιείται και για την απόδειξη των ιδιοτήτων της διάταξης. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

α) **Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 + 3 > 4 + 3$ και $8 - 3 > 4 - 3$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha + \gamma$ και $\beta + \gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:
$(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta$. Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$.
Δηλαδή η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

β) **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot 2 > 4 \cdot 2$ και $\frac{8}{2} > \frac{4}{2}$. Γενικά ισχύει:

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Απόδειξη

- Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha\gamma$ και $\beta\gamma$, βρίσκουμε τη διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta)$ (1).
Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$. Άρα οι αριθμοί γ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί, οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλαδή $\gamma(\alpha - \beta) > 0$. Από την ισότητα (1) έχουμε ότι η διαφορά $\alpha\gamma - \beta\gamma$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.
- Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

γ) **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.**

Π.χ. είναι $8 > 4$, οπότε $8 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$ και $\frac{8}{-2} < \frac{4}{-2}$. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma < 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma < \beta\gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}}$

δ) **Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $3 > 2$ και $7 > 4$, οπότε $3 + 7 > 2 + 4$. Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > \delta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \gamma > \beta + \delta}$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει και η **μεταβατική ιδιότητα**:

Αν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\beta > \gamma}$ τότε $\boldsymbol{\alpha > \gamma}$

Π.χ. είναι $3 > 1$ και $1 > -2{,}5$ οπότε $3 > -2{,}5$.

ε) **Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.**

Π.χ. είναι $3 > 2 > 0$ και $7 > 4 > 0$, οπότε $3 \cdot 7 > 2 \cdot 4$. Γενικά ισχύει:

Αν **α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί** με $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > \delta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\gamma > \beta\delta}$

Απόδειξη

Είναι $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (β) έχουμε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (1)
Είναι $\gamma > \delta$ και $\beta > 0$, οπότε για τον ίδιο λόγο έχουμε $\beta\gamma > \beta\delta$ (2)
Από τις ανισότητες (1), (2) και σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Παρατηρήσεις:

1) Υπενθυμίζουμε ότι το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού α είναι μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

Επομένως:

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

2) Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα.

Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $\begin{cases} 6 > 4 \\ 3 > 1 \end{cases}$, τότε καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

Γ Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Οι ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούνται και για την επίλυση ανισώσεων.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$, που είναι πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. (Στο παράδειγμα έχουμε Ε.Κ.Π. = 4 > 0, οπότε η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει, *ιδιότητα β*),	$x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$ $4 \cdot x - 4 \cdot \frac{3x+1}{2} > 4 \cdot \frac{3}{4}$
Απαλείφουμε τους παρονομαστές.	$4x - 2(3x+1) > 3$
Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις	$4x - 6x - 2 > 3$
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, *ιδιότητα α*).	$4x - 6x > 3 + 2$ $-2x > 5$
Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.	$\frac{-2x}{-2} < \frac{5}{-2}$
Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου. (Στο παράδειγμα ο συντελεστής είναι –2 < 0 και γι' αυτό αλλάζει η φορά της ανίσωσης, *ιδιότητα γ*).	$x < -\frac{5}{2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $\alpha > 4$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;

α) $-3\alpha + 2 < -10$ β) $\frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$ γ) $-2(\alpha + 2) < -12$

Λύση

α)
$\alpha > 4$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με –3)
$-3\alpha < -12$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το 2)
$-3\alpha + 2 < -12 + 2$
$-3\alpha + 2 < -10$

β) $\alpha > 4$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με $\frac{5}{4}$)

$$\frac{5}{4} \cdot \alpha > \frac{5}{4} \cdot 4$$

$$\frac{5\alpha}{4} > 5$$ (αφαιρούμε και από τα δύο μέλη της ανίσωσης το 1)

$$\frac{5\alpha}{4} - 1 > 5 - 1, \text{ οπότε } \frac{5\alpha}{4} - 1 > 4$$

γ) $\alpha > 4$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανίσωσης το 2)

$$\alpha + 2 > 4 + 2$$

$$\alpha + 2 > 6$$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το –2)

$$-2(\alpha + 2) < -2 \cdot 6$$

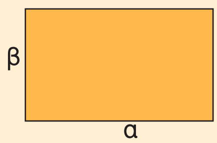
$$-2(\alpha + 2) < -12$$

2 **Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου ισχύουν**

$4 \leq \alpha \leq 6$ και $2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5$.

Ποιες τιμές μπορεί να πάρει

α) η περίμετρος του ορθογωνίου; β) το εμβαδόν του ορθογωνίου;



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\alpha + 2\beta$. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των ανισοτήτων $\begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5 \end{cases}$ με το 2, οπότε έχουμε $\begin{cases} 8 \leq 2\alpha \leq 12 \\ 5 \leq 2\beta \leq 9 \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και έχουμε

$8 + 5 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 12 + 9$ ή $13 \leq 2\alpha + 2\beta \leq 21$ ή $13 \leq \Pi \leq 21$.

Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογωνίου είναι από 13 έως και 21.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha\beta$. Οι ανισότητες $\begin{cases} 4 \leq \alpha \leq 6 \\ 2{,}5 \leq \beta \leq 4{,}5 \end{cases}$ έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $4 \cdot 2{,}5 \leq \alpha\beta \leq 6 \cdot 4{,}5$ ή $10 \leq \alpha\beta \leq 27$ ή $10 \leq E \leq 27$.

Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι από 10 έως και 27.

3 **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδειχτεί ότι ισχύει $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Πότε ισχύει η ισότητα;**

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι $x^2 + y^2 \geq 2xy$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ ή $(x - y)^2 \geq 0$.

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, αφού το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Η ισότητα ισχύει όταν $(x - y)^2 = 0$, οπότε $x - y = 0$ δηλαδή $x = y$.

4 Οι μαθητές μιας τάξης προκειμένου να πάνε μια εκδρομή ζήτησαν προσφορά από δύο πρακτορεία.
– Το πρώτο πρακτορείο ζήτησε 15 ευρώ για κάθε μαθητή και εφόσον οι μαθητές ήταν πάνω από 25 θα έκανε και έκπτωση 10%.
– Το δεύτερο πρακτορείο ζήτησε 12 ευρώ για κάθε μαθητή και 45 ευρώ για τα διάφορα έξοδα (διόδια, ναύλα φεριμπότ κ.τ.λ.).

Αν οι μαθητές που συμμετέχουν στην εκδρομή είναι περισσότεροι από 25, ποιο πρακτορείο έκανε την καλύτερη προσφορά;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι μαθητές που τελικά συμμετέχουν στην εκδρομή είναι x, όπου $x > 25$.

Στο πρώτο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $15x - \frac{10}{100}15x = 15x - \frac{3}{2}x$ ευρώ,

ενώ στο δεύτερο πρακτορείο πρέπει να πληρώσουν $12x + 45$ ευρώ.

Για να είναι καλύτερη η προσφορά του πρώτου πρακτορείου, πρέπει να ισχύει

$$15x - \frac{3}{2}x < 12x + 45 \;\text{ ή }\; 30x - 3x - 24x < 90 \;\text{ ή }\; 3x < 90 \;\text{ ή }\; x < 30.$$

Επομένως αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 25 και λιγότεροι από 30, τότε την καλύτερη προσφορά έκανε το πρώτο πρακτορείο, ενώ αν οι μαθητές είναι περισσότεροι από 30, την καλύτερη προσφορά έκανε το δεύτερο πρακτορείο.

Αν οι μαθητές είναι 30, τότε οι προσφορές των δύο πρακτορείων είναι ίδιες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $\alpha < 6$, τότε $\alpha - 6 < 0$. ☐

β) Αν $\alpha > \beta$, τότε $-\alpha < -\beta$. ☐

γ) Αν $\alpha < 0$, τότε $-\alpha > 0$. ☐

δ) Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$. ☐

ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$. ☐

στ) Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$. ☐

ζ) Αν $\alpha > 6$ και $\beta > -4$, τότε $\alpha + \beta > 2$. ☐

η) Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$. ☐

2 Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν $\alpha > 3$, τότε $\alpha - 3$ ... 0

β) Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε α ... γ

γ) Αν $α > 0$ και $β < 0$, τότε $\frac{α}{β}$ ... 0

δ) Αν $γ < 0$ και $αγ \leq βγ$, τότε α ... β

ε) Αν $α \neq 0$, τότε $α^2$ ... 0

στ) Αν $α \leq 0$ και $β \leq 0$, τότε $α + β$ ... 0

3 Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε, ώστε από την ανίσωση $3x – 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

4 Με ποιες ιδιότητες της διάταξης από την ανισότητα $x > 3$ προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες;

α) $x + 4 > 7$ β) $x – 2 > 1$ γ) $5x > 15$ δ) $–6x < –18$

5 Αν $α > 12$ και $β > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;

α) $α + β > 15$ β) $α – β > 9$ γ) $αβ > 36$ δ) $\frac{α}{β} > 4$

6 Ένας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, αρκεί να ισχύει $αδ = βγ$. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{α}{β} > \frac{γ}{δ}$, αρκεί να αποδείξει ότι $αδ > βγ$. Η σκέψη που έκανε είναι σωστή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν ισχύει $3(α – β) > 2(α + β)$, τότε να αποδείξετε ότι $α > 5β$.

2 Ποιες ιδιότητες της διάταξης πρέπει να εφαρμόσουμε στην ανισότητα $x > –6$ για να αποδείξουμε τις παρακάτω ανισότητες;

α) $–5x – 30 < 0$ β) $3x + 18 > 0$ γ) $2(x + 4) > –4$

3 Αν $2 < α < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί

α) $α – 2$ β) $2α – 5$ γ) $1 – 3α$

4 Αν $α < β$, τότε να αποδείξετε ότι

α) $5α – 3 < 5β – 3$ β) $–2α + 4 > –2β + 4$ γ) $α < \frac{α + β}{2}$ δ) $\frac{α + β}{2} < β$

5 Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:

α) $3 < x + y < 8$ β) $4 < 2x + y < 11$ γ) $–4 < x – y < 1$

6 Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xy > 6$ β) $(x – 2)(y – 3) > 0$ γ) $(x + 2)y > 12$

7 Αν α, β θετικοί αριθμοί με $α > β$, τότε να αποδείξετε ότι $α^2 > β^2$.

8 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^2 > \alpha$ β) Αν $x > 2$, τότε $x^3 > 2x^2$

9 Αν $\alpha > \beta$ και α, β ομόσημοι, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

10 Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $(x-3)(y-2) < 0$ β) $xy + 6 < 2x + 3y$

11 Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδείξετε ότι:

α) $x^2 + 1 \geq 2x$ β) $(x+y)^2 \geq 4xy$ γ) $x^2 + y^2 + 1 \geq 2y$

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε πότε ισχύει η ισότητα.

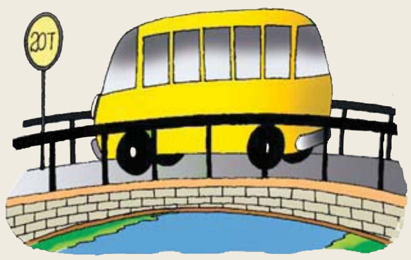
12 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $x > 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \geq 2$ β) Αν $x < 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \leq -2$

13 Να βρείτε το φυσικό αριθμό που είναι μεταξύ των αριθμών 114 και 135 και ο οποίος, όταν διαιρεθεί με το 15, δίνει υπόλοιπο 6.

14 Η τιμή ενός παντελονιού κυμαίνεται από 30 έως 35 € και μιας μπλούζας από 22 έως 25 €. Αν κάποιος θέλει ν' αγοράσει 2 παντελόνια και 3 μπλούζες, τότε μεταξύ ποιων ποσών θα κυμαίνονται τα χρήματα που πρέπει να πληρώσει;

15 Μ' ένα πούλμαν ταξιδεύουν 51 άτομα (ο οδηγός και 50 επιβάτες). Αν το βάρος κάθε ατόμου κυμαίνεται μεταξύ 60 kg και 100 kg, οι αποσκευές κάθε επιβάτη ζυγίζουν από 4 kg έως και 15 kg και το πούλμαν έχει απόβαρο 13,25 t, τότε να εκτιμήσετε το συνολικό βάρος του πούλμαν. Είναι δυνατόν το πούλμαν να διασχίσει μια γέφυρα επαρχιακού δρόμου που το ανώτατο επιτρεπόμενο βάρος διέλευσης είναι 20 t;



16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $11 - 3x < 7x + 1$ β) $2x - 9 > 5x + 6$ γ) $4(3x-5) > 3(4x+5)$

δ) $\frac{3-4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6-x}{2}$ ε) $\frac{2x+1}{6} - x < \frac{3-2x}{3}$ στ) $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x+4}{6}$

17 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x + 3 < 9 + 5x \\ 1 - x < 2x + 7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \end{cases}$

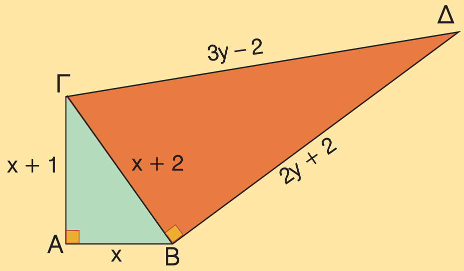
18 Να βρείτε θετικό ακέραιο αριθμό x, ώστε $\frac{x}{x+1} < \frac{31}{40}$ και $\frac{x+1}{x+2} > \frac{31}{40}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2$ **β)** $\dfrac{x+\alpha}{\beta} - \dfrac{x+\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} - 1.$

2 Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια. Να βρείτε τις τιμές των x, y.



3 Το γινόμενο δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών, αν διαιρεθεί με το άθροισμά τους, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23. Να βρείτε τους αριθμούς.

4 Να λύσετε τις εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$.

α) $\dfrac{x}{x-\alpha} + \dfrac{2x}{x+\alpha} = \dfrac{2\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$ **β)** $\dfrac{3\alpha}{x^2-\alpha x} + \dfrac{1}{x^2+\alpha x} = \dfrac{6x}{x^2-\alpha^2}$

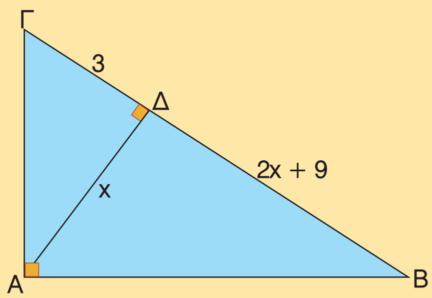
5 Αν μια λύση της εξίσωσης $x^2 + (\lambda-5)x + \lambda = 0$ είναι ο αριθμός 1, να βρείτε την άλλη λύση.

6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$, αν είναι γνωστό ότι το $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

7 Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους αυξημένο κατά τον αντίστροφο του γινομένου τους να είναι ίσο με 1.

8 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 m και το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 399 m^2.

9 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΔ. Αν είναι $ΑΔ = x$, $ΒΔ = 2x + 9$ και $ΓΔ = 3$, να υπολογίσετε τον αριθμό x.



10 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(1+\alpha)(1+\beta)$ και $1+\alpha+\beta$.

11 **α)** Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$.

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

12 Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{\nu(\nu+2)} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} > \frac{2}{\nu(\nu+1)}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

13 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$ **β)** $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$
γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

14 Να διατάξετε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, αν ισχύει $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma$.

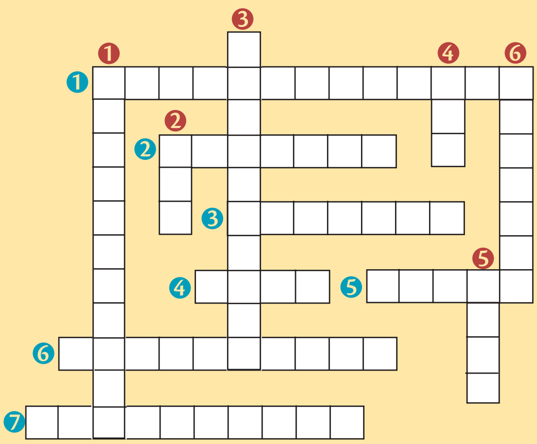
15 Αν $\alpha > 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + 1)x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

16 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$. (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995**).

17 Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$. Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη; (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001**).

18 – Ο καθηγητής:
Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-19}{2001} + \frac{x-17}{2003} + \frac{x-15}{2005} + \frac{x-13}{2007} = 4$.
– Ο μαθητής:
Κύριε, αυτή η εξίσωση ούτε μέχρι το 2020 δε λύνεται.
Εσείς μπορείτε να τη λύσετε;
Υπόδειξη: *Παρατηρήστε ότι* $\frac{x-19}{2001} = \frac{x-2020+2001}{2001} = \frac{x-2020}{2001} + 1$, *κ.τ.λ.*

19 Να λύσετε το σταυρόλεξο



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ
1. Είναι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$..
2. Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών.
3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου.
4. Ο αριθμός 2 είναι .... της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x - 1)^2 = 0$.
6. Η επίλυση μιας εξίσωσης 2ου βαθμού γίνεται και με .... τετραγώνου.
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΚΑΘΕΤΑ
1. Το πρόσημό της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.
2. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ έχει .... λύσεις.
3. Ιδιότητα που ισχύει και στη διάταξη πραγματικών αριθμών.
4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει .... λύση.
5. Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης.
6. Είναι η εξίσωση $0x = 7$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η **γενική μορφή** μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $αx + β = 0$ με $α \neq 0$, π.χ. $3x + 18 = 0$
- **Λύση** ή **ρίζα** μιας εξίσωσης είναι η τιμή του αγνώστου που την επαληθεύει. Π.χ. ο αριθμός $x = -6$ είναι λύση της εξίσωσης $3x + 18 = 0$, αφού $3 \cdot (-6) + 18 = 0$.
- Η εξίσωση $αx + β = 0$

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $αx + β = 0$			Παραδείγματα
$α \neq 0$		έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{β}{α}$	$4x + 3 = 0$ ή $4x = -3$ ή $x = -\frac{3}{4}$
$α = 0$	$β \neq 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	$0x = 2$ (αδύνατη)
	$β = 0$	έχει λύση κάθε αριθμό (ταυτότητα)	$0x = 0$ (ταυτότητα)

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Η **γενική μορφή** μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο είναι $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, π.χ. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ με $α = 2$, $β = -5$ και $γ = 3$
- Η εξίσωση $x^2 = α$

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $x^2 = α$		Παραδείγματα
$α > 0$	έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$	$x^2 = 2$ άρα $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$
$α < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)	$x^2 = -4$ (αδύνατη)
$α = 0$	έχει μία λύση τη $x = 0$ (διπλή)	$x^2 = 0$ άρα $x = 0$ (διπλή λύση)

- Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$

Διακρίνουσα $Δ = β^2 - 4αγ$	Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$
$Δ > 0$	έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \frac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}$ και $x = \frac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}$
$Δ = 0$	έχει μία διπλή λύση, την $x = -\frac{β}{2α}$
$Δ < 0$	δεν έχει λύση (αδύνατη)

- Παραγοντοποίηση τριωνύμου:
  Αν $ρ_1$, $ρ_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, τότε $αx^2 + βx + γ = α(x - ρ_1)(x - ρ_2)$

3. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- **Κλασματική εξίσωση** ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.
- Ένας αριθμός που μηδενίζει κάποιον παρονομαστή μιας κλασματικής εξίσωσης δεν μπορεί να είναι λύση (ή ρίζα) της.

4. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

Ορισμός διάταξης:
Αν $α - β > 0$, τότε $α > β$
Αν $α - β < 0$, τότε $α < β$
Αν $α - β = 0$, τότε $α = β$

Ιδιότητες της διάταξης

- Αν $α > β$, τότε $α + γ > β + γ$ και $α - γ > β - γ$
- Αν $α > β$ και $γ > 0$, τότε $αγ > βγ$ και $\frac{α}{γ} > \frac{β}{γ}$
- Αν $α > β$ και $γ < 0$, τότε $αγ < βγ$ και $\frac{α}{γ} < \frac{β}{γ}$
- Αν $α > β$ και $γ > δ$, τότε $α + γ > β + δ$
- Αν $α > β$ και $β > γ$, τότε $α > γ$ (Μεταβατική ιδιότητα)
- Αν $α > β > 0$ και $γ > δ > 0$, τότε $αγ > βδ$

Παρατηρήσεις:
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $α^2 \geq 0$.
- Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $α^2 + β^2 = 0$, τότε $α = β = 0$.
- Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.