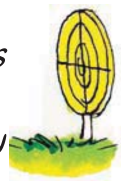
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

✓ *Θυμάμαι πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.*
✓ *Γνωρίζω πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.*
✓ *Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.*

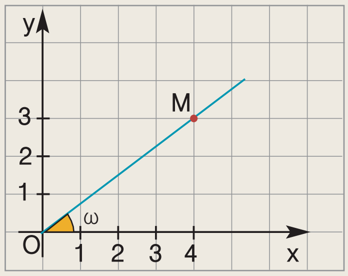


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέραμε την ημιευθεία ΟΜ, που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ω.

1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και να υπολογίσετε την απόσταση του Μ από την αρχή Ο.

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

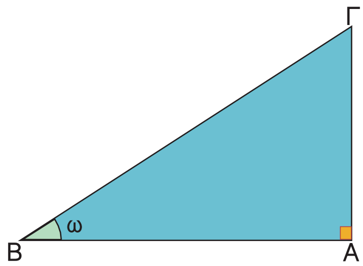


Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

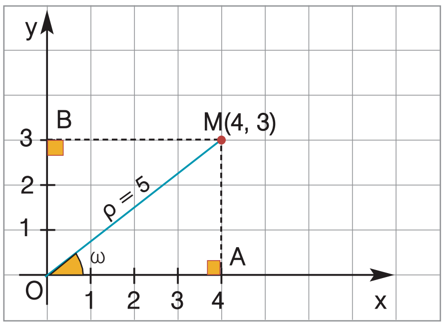


Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρουμε το σημείο $M(4, 3)$ και φέρουμε $MA \perp x'x$ και $MB \perp y'y$, τότε έχουμε $OA = 4$ και $OB = AM = 3$.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση $\rho = OM$ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα

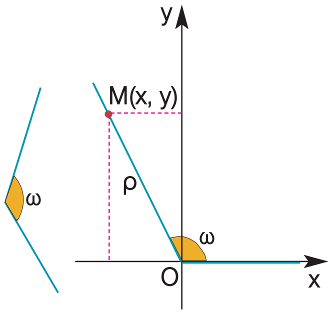


$$\text{ημω} = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\text{συνω} = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\text{εφω} = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.



Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y), διαφορετικό από το O, τότε για την απόσταση ρ = OM ισχύει

$$\boldsymbol{ρ = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$ημω = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{ρ}$$

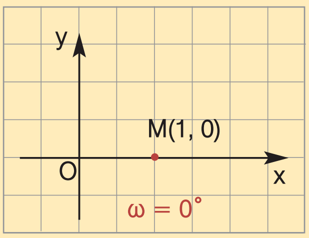
$$συνω = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{ρ}$$

$$εφω = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

- **Αν η γωνία ω είναι οξεία**, τότε είναι $x>0$, $y>0$, $ρ>0$, οπότε: **ημω>0, συνω>0, εφω>0.**
- **Αν η γωνία ω είναι αμβλεία**, τότε είναι $x<0$, $y>0$, $ρ>0$, οπότε: **ημω>0, συνω<0, εφω<0.**

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $ω = 0^\circ$ ή $ω = 90^\circ$ ή $ω = 180^\circ$.
Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0°, 90° και 180°.

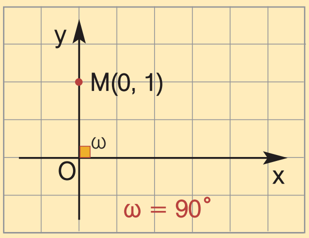


Αν M σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το M(1,0), τότε $ω = x\hat{O}M = 0^\circ$ και $ρ = OM = 1$. Άρα:

$$\textbf{ημ}0^\circ = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\textbf{συν}0^\circ = \frac{x}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\textbf{εφ}0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

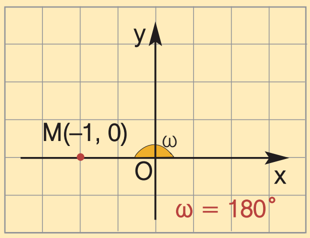


Αν M σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το M(0,1), τότε $ω = x\hat{O}M = 90^\circ$ και $ρ = OM = 1$. Άρα:

$$\textbf{ημ}90^\circ = \frac{y}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\textbf{συν}90^\circ = \frac{x}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$$

εφ90° δεν ορίζεται
(γιατί $x=0$)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox′ π.χ. το M(–1,0), τότε $ω = x\hat{O}M = 180^\circ$ και $ρ = OM = 1$. Άρα:

$$\textbf{ημ}180^\circ = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\textbf{συν}180^\circ = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\textbf{εφ}180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

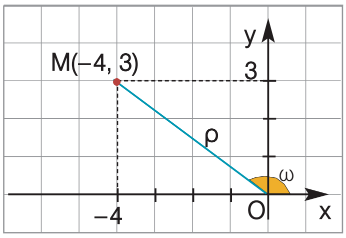
Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30°, 45° και 60° που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

ω	30°	45°	60°
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο M(–4, 3). Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

Λύση



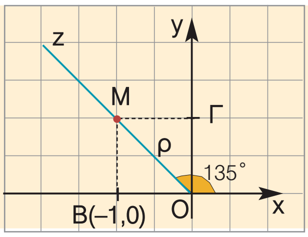
Για την απόσταση OM = ρ έχουμε:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

Άρα: $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$

και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $x\hat{O}z = 135°$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο M με τετμημένη –1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}M = 135°$.



Λύση

Φέρνουμε MB ⊥ x′x και MΓ ⊥ y′y. Επειδή $x\hat{O}M = 135°$ και $x\hat{O}y = 90°$ θα είναι $\Gamma\hat{O}M = 45°$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο OMΓ είναι και ισοσκελές.

Άρα OΓ = MΓ = OB = 1 και η τεταγμένη του σημείου M είναι y = 1.

Δηλαδή έχουμε M(–1, 1) και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Άρα $\eta\mu 135° = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 135° = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\varepsilon\varphi 135° = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Για το σημείο M(5, 12) είναι ρ = OM = 13. Αν $\omega = x\hat{O}M$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

ημω = ... συνω = ... εφω = ...

2 Αν η γωνία $ω = x\hat{O}M$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο $>$ ή $<$.

ημω ... 0 συν ... 0 εφω ... 0

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ90°	1. 0
β. συν180°	2. –1
γ. εφ0°	3. 1
δ. συν90°	
ε. ημ0°	
στ. εφ180°	
ζ. συν0°	
η. ημ180°	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq συνω \leq 1$. ☐

β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $εφω < 0$. ☐

γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει $ημω > 0$, τότε η ω είναι οξεία. ☐

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $ω = x\hat{O}M$, όταν:

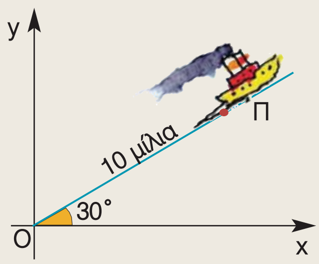
α) Μ(3, 4) **β)** Μ(–5, 12) **γ)** Μ(0, 3)

2 Μια ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -2x$.

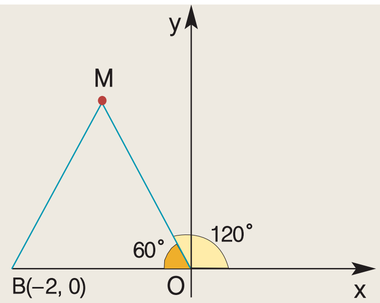
α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της Μ που έχει τετμημένη –1.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $ω = x\hat{O}M$.

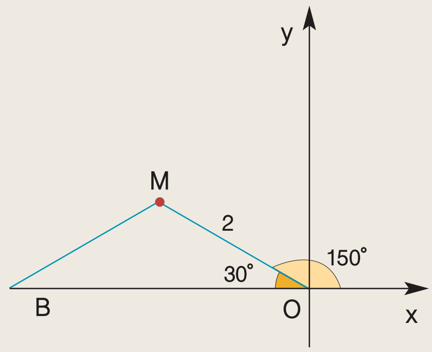
3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα Οx γωνία 30°. Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



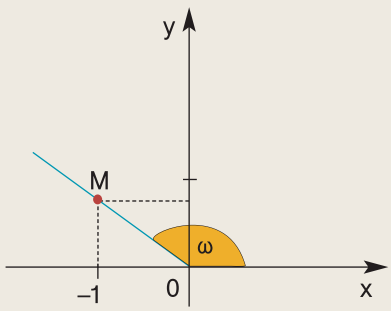
4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισόπλευρο.
Να υπολογίσετε:
α) τις συντεταγμένες του Μ.
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120°.



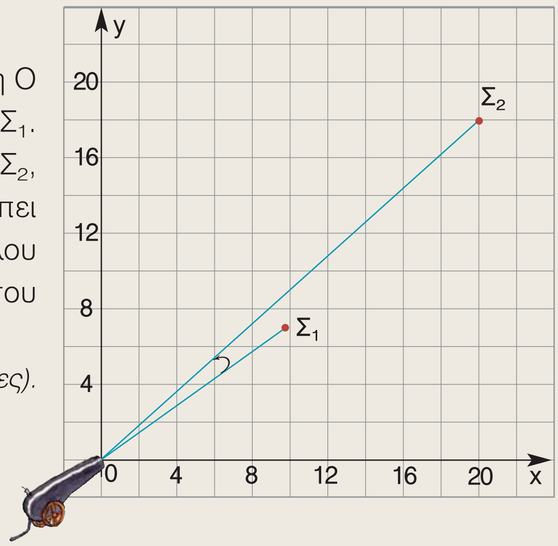
5 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισοσκελές.
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Μ είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150°.



6 Στο διπλανό σχήμα είναι εφω $= -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι -1, τότε να υπολογίσετε:
α) την τεταγμένη του σημείου Μ.
β) το ημω και το συνω.



7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση Ο και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο $Σ_1$. Αν ο στόχος $Σ_1$ μετακινηθεί στη θέση $Σ_2$, τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση;
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

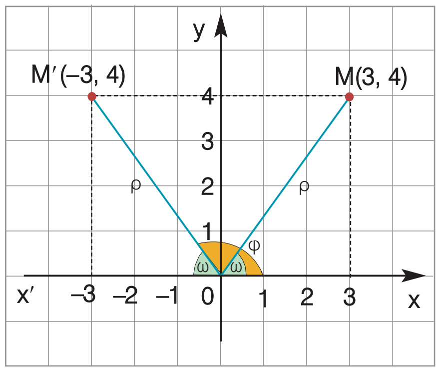
Γνωρίζω ποια σχέση συνδέει:
- ✓ *Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών.*
- ✓ *Τις γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να πάρετε το σημείο Μ(3, 4).

1. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Μ′, που είναι συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα y′y;
2. Να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες $x\hat{O}M = \omega$ και $x\hat{O}M' = \varphi$ είναι παραπληρωματικές.
3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ και τη σχέση που τους συνδέει.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο Μ(3, 4) και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο Μ′(–3, 4) ως προς τον άξονα y′y.



Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $x\hat{O}M$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $x'\hat{O}M' = \omega$, οπότε για τη γωνία $\varphi = x\hat{O}M'$ ισχύει $\varphi = 180^\circ - \omega$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές, αφού $\omega + \varphi = 180^\circ$.

Έχουμε ακόμη ότι

$\rho = OM = OM' = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, οπότε:

$$ημω = \frac{4}{5},\quad συνω = \frac{3}{5},\quad εφω = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$ημφ = \frac{4}{5},\quad συνφ = -\frac{3}{5},\quad εφφ = -\frac{4}{3}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι:

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω, $\varphi = 180^\circ - \omega$ έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γενικά Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν:

- $ημ(180^\circ - \omega) = ημω$
- $συν(180^\circ - \omega) = -συνω$
- $εφ(180^\circ - \omega) = -εφω$

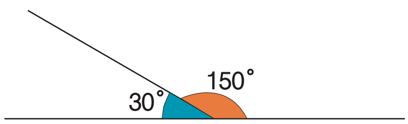
Με τους προηγούμενους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της.

Για παράδειγμα,

$$ημ150^\circ = ημ(180^\circ - 30^\circ) = ημ30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$συν150^\circ = συν(180^\circ - 30^\circ) = -συν30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ150^\circ = εφ(180^\circ - 30^\circ) = -εφ30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150° και 30°, αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο. Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180°, τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν $ημx = ημ35^\circ$ και $0 \leq x \leq 180^\circ$, τότε είναι $x = 35^\circ$ ή $x = 180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή $x = 35^\circ$ ή $x = 145^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $Α = ημ140^\circ + συν170^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ$.

Λύση

Οι γωνίες 140° και 40° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή είναι $ημ140^\circ = ημ40^\circ$.
Οι γωνίες 170° και 10° είναι παραπληρωματικές, οπότε θα έχουν αντίθετα συνημίτονα, δηλαδή είναι $συν170^\circ = -συν10^\circ$. Άρα:
$Α = ημ140^\circ + συν170^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ = ημ40^\circ - συν10^\circ - ημ40^\circ + συν10^\circ = 0$.

2 Αν $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{Α} = 80^\circ$ και $\hat{Β} = 70^\circ$ να αποδειχθεί ότι: α) $ημ(Α + Β) = ημΓ$ β) $συν(Α + Β) = -συνΓ$

Λύση

Οι γωνίες $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ του τριγώνου έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή είναι:
$80^\circ + 70^\circ + \hat{Γ} = 180^\circ$, οπότε $\hat{Γ} = 30^\circ$. Άρα:
α) $ημ(Α + Β) = ημ(80^\circ + 70^\circ) = ημ150^\circ = ημ(180^\circ - 30^\circ) = ημ30^\circ = ημΓ$.
β) $συν(Α + Β) = συν(80^\circ + 70^\circ) = συν150^\circ = συν(180^\circ - 30^\circ) = -συν30^\circ = -συνΓ$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $ημ150^\circ = ημ30^\circ$	☐	β) $συν135^\circ = συν45^\circ$	☐
γ) $εφ100^\circ = εφ80^\circ$	☐	δ) $εφ75^\circ = -εφ105^\circ$	☐
ε) $συν110^\circ = -συν70^\circ$	☐	στ) $ημ140^\circ = -ημ40^\circ$	☐

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
α) Αν $ημx = ημ60^\circ$, τότε $x =$ ....
β) Αν $συνx = -συν20^\circ$, τότε $x =$ ....
γ) Αν $εφx = -εφ30^\circ$, τότε $x =$ ....

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 140^\circ$	1. $\eta\mu 40^\circ$
	2. $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 140^\circ$	3. $\varepsilon\varphi 40^\circ$
	4. $-\eta\mu 40^\circ$
γ. $\varepsilon\varphi 140^\circ$	5. $-\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
	6. $-\varepsilon\varphi 40^\circ$

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) 120° β) 135° γ) 150°

2 Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ = 0$
β) $\varepsilon\varphi 122^\circ - \varepsilon\varphi 58^\circ \cdot \varepsilon\varphi 135^\circ = 0$

3 Να αποδείξετε ότι:
α) $\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = 1$ β) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = 2$

4 Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(140^\circ + x) = \eta\mu(40^\circ - x)$ και $\sigma\upsilon\nu(158^\circ - x) = -\sigma\upsilon\nu(22^\circ + x)$.

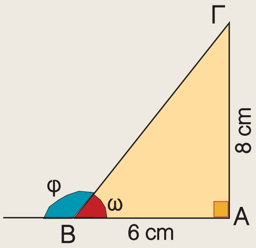
5 Να βρείτε τη γωνία x, όταν:
α) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $\eta\mu x = 1 - \eta\mu x$ γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ ε) $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$ στ) $2\varepsilon\varphi x = 1 + \varepsilon\varphi x$

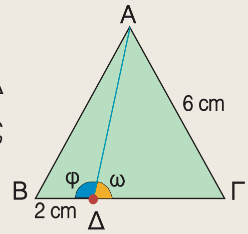
6 Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών του;

7 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A - \eta\mu \Gamma + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 0$ β) $\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi \Gamma = 0$

8 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



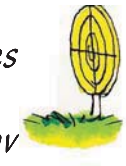
9 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

✓ *Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και μαθαίνω πώς αποδεικνύονται.*

✓ *Χρησιμοποιώ τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για την απόδειξη άλλων απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε ένα σημείο Μ στο 1ο ή στο 2ο τεταρτημόριο με όποιες συντεταγμένες θέλετε.

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

2. Να υπολογίσετε την παράσταση $(ημω)^2 + (συνω)^2$ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τα αποτελέσματα που βρήκαν οι συμμαθητές σας.

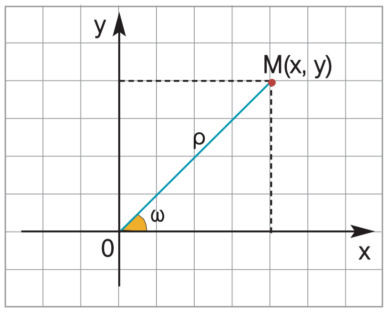
3. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{ημω}{συνω}$ και να τον συγκρίνετε με την εφω.

Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση ρ ενός σημείου Μ(x, y) από την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το ρ^2, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \qquad (1).$$



Επειδή $ημω = \dfrac{y}{\rho}$ και $συνω = \dfrac{x}{\rho}$, η ισότητα *(1)* γίνεται

$$(συνω)^2 + (ημω)^2 = 1 \text{ ή συντομότερα } ημ^2ω + συν^2ω = 1.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει

$$\boxed{ημ^2ω + συν^2ω = 1}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $ημω = \dfrac{y}{\rho}$ και $συνω = \dfrac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $συνω \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \text{ ή } \frac{ημω}{συνω} = \frac{y\rho}{x\rho} \text{ ή } \frac{ημω}{συνω} = \frac{y}{x} = εφω$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $συνω \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{εφω = \frac{ημω}{συνω}}$$

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**, γιατί με τη βοήθειά τους αποδεικνύουμε και άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ημω $= \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.**

Λύση

Από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε

$συν^2ω = 1 - ημ^2ω$ ή $συν^2ω = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25}$ ή $συν^2ω = \frac{16}{25}$ ή $συνω = \pm\frac{4}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε $συνω < 0$, οπότε $συνω = -\frac{4}{5}$.

Από την ταυτότητα $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ έχουμε $εφω = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$, οπότε $εφω = -\frac{3}{4}$.

2 **Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει εφω = 2, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.**

Λύση

Έχουμε $εφω = 2$ δηλαδή $\frac{ημω}{συνω} = 2$, οπότε $ημω = 2συνω$ *(1)*.

Αν στην ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ αντικαταστήσουμε το ημω με το 2συνω έχουμε

$(2συνω)^2 + συν^2ω = 1$ ή $4συν^2ω + συν^2ω = 1$ ή $5συν^2ω = 1$ ή $συν^2ω = \frac{1}{5}$,

άρα $συνω = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ ή $συνω = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Επειδή η γωνία ω είναι οξεία έχουμε $συνω > 0$, οπότε $συνω = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Από την ισότητα *(1)* έχουμε $ημω = 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}$ ή $ημω = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3 **Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:**

α) $(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = 1$ β) $1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$

Λύση

α) Έχουμε

$(ημx - συνx)^2 + 2ημxσυνx = ημ^2x - 2ημxσυνx + συν^2x + 2ημxσυνx = ημ^2x + συν^2x = 1$

β) Έχουμε

$1 + εφ^2ω = 1 + \left(\frac{ημω}{συνω}\right)^2 = 1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $ημ^2ω = \frac{3}{5}$, τότε $συν^2ω = \frac{2}{5}$. ☐

β) Αν $συνω = 0$, τότε δεν ορίζεται η εφω. ☐

γ) Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημ^2ω = συν^2ω - 1$. ☐

δ) Αν $ημω = \frac{5}{13}$ και $συνω = \frac{12}{13}$, τότε $εφω = \frac{5}{12}$ ☐

2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $ημω = 0$ και $συνω = 0$. Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $ημω = 1$, τότε $συνω =$ ....

β) Αν $ημω = 0$, τότε $συνω =$ ....

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $ημω = \frac{3}{5}$, τότε το συνω είναι ίσο με:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{4}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ ή $-\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$ ή $-\frac{4}{5}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

2 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $συνω = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

3 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $εφω = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

4 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $ημω = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$A = \frac{1}{3}ημω + \frac{2}{3}συνω - \frac{1}{10}εφω$.

5 Να αποδείξετε ότι:

α) $ημ^3ω + ημωσυν^2ω = ημω$ β) $συν^2ω - συν^4ω = ημ^2ωσυν^2ω$

6 Αν είναι $x = 3συνω$ και $y = 3ημω$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $xσυνω + yημω = 3$ β) $x^2 + y^2 = 9$

7 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1$ β) $ημ^2ασυν^2β + ημ^2αημ^2β + συν^2α = 1$

8 Να αποδείξετε ότι:

α) $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 = 2$

β) $(αημω + βσυνω)^2 + (βημω - ασυνω)^2 = α^2 + β^2$

9 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2x\, εφ^2x + συν^2x = 1$ β) $\dfrac{ημx + συνx}{1 + εφx} = συνx$

10 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{συν^2x}{1 + ημx} = 1 - ημx$ β) $εφx + \dfrac{συνx}{1 + ημx} = \dfrac{1}{συνx}$

11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $ημ50^\circ ημ130^\circ - συν50^\circ συν130^\circ$

β) $ημ^2 14^\circ + ημ^2 114^\circ + συν^2 166^\circ + συν^2 66^\circ$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $εφ70^\circ συν70^\circ - εφ110^\circ συν110^\circ = 0$

β) $εφ^2 40^\circ συν^2 40^\circ + συν^2 140^\circ = 1$

13 Αν είναι $α = 30^\circ$ και $β = 60^\circ$, τότε να αποδείξετε ότι:

$ημ^2x\, ημα\, ημβ + συν^2x\, συνα\, συνβ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΙΝΙΓΜΑ

14 Είναι γωνία, όχι οξεία,

ημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{λ + 1}{λ + 2}$ και

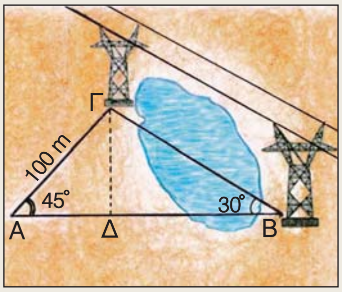
συνημίτονο έχει τον αριθμό $\dfrac{λ}{λ + 2}$.

Ποια γωνία είναι;

2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

✓ *Γνωρίζω τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων και μαθαίνω να τους εφαρμόζω στη λύση προβλημάτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

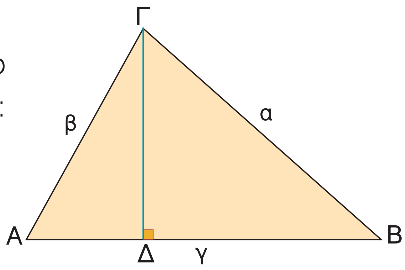


Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση ΓΒ δύο πυλώνων της ΔΕΗ, γιατί ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μια λίμνη. Γι' αυτό επιλέγει μια θέση Α που απέχει 100 m από τον πυλώνα Γ και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο μετράει τις γωνίες $\hat{A} = 45^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

1. Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση ΓΒ, αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση ΓΒ πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι λόγοι $\dfrac{ΓΒ}{ημ45^\circ}$ και $\dfrac{ΓΑ}{ημ30^\circ}$ είναι ίσοι.
2. Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

Α Νόμος των ημιτόνων

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να υπολογίζουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του ή μια πλευρά και μια οξεία γωνία του. Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου όταν δεν είναι ορθογώνιο;



Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:

$ημΑ = \dfrac{ΓΔ}{β}$ ή $ΓΔ = βημΑ$ *(1)*

$ημΒ = \dfrac{ΓΔ}{α}$ ή $ΓΔ = αημΒ$ *(2)*

Από τις ισότητες *(1)*, *(2)* έχουμε $βημΑ = αημΒ$ ή $\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ}$.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\boxed{\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημΓ}}$$

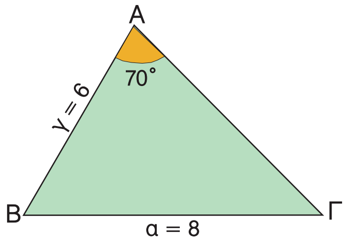
Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των ημιτόνων**.

Γενικά

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με το νόμο των ημιτόνων, αν γνωρίζουμε μια πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μια άλλη πλευρά ή γωνία του, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του (πλευρές – γωνίες).

Για παράδειγμα, στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος μπορούμε με το νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$, αφού



$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \text{ ή } \frac{8}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{6}{\eta\mu\Gamma} \text{ ή } 8\eta\mu\Gamma = 6\eta\mu 70^\circ \text{ ή}$$

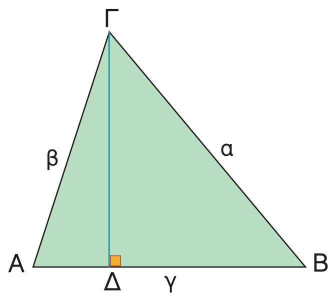
$$\eta\mu\Gamma = \frac{6\eta\mu 70^\circ}{8} \text{ ή } \eta\mu\Gamma = \frac{6 \cdot 0{,}94}{8} \text{ ή } \eta\mu\Gamma = 0{,}705.$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$.

Β Νόμος των συνημιτόνων

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε με το νόμο των ημιτόνων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου, αφού δε γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι γωνία της.

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$ *(1)*.



Επειδή $\Delta B = \gamma - A\Delta$, η ισότητα *(1)* γράφεται:

$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2$ ή $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + A\Delta^2 - 2\gamma \cdot A\Delta$ *(2)*.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2$ και $\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{A\Delta}{\beta}$ ή $A\Delta = \beta\sigma\upsilon\nu A$.

Άρα η ισότητα *(2)* γράφεται: $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}$

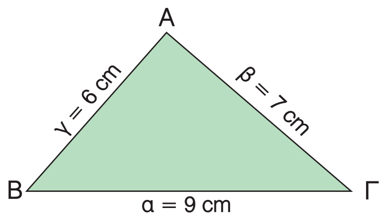
Η προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει και όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο και ονομάζεται **νόμος των συνημιτόνων**.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

Με το νόμο των συνημιτόνων, αν σ' ένα τρίγωνο γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία του.

Για παράδειγμα, αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 9$ cm, $\beta = 7$ cm και $\gamma = 6$ cm, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.



Π.χ. για να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{B}$ έχουμε:

$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha$συν$B$ ή

$7^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot$ συνB ή

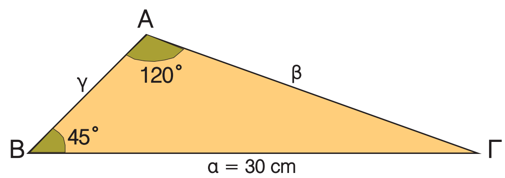
$49 = 36 + 81 - 108 \cdot$ συνB ή 108 συν$B = 68$ ή

συν$B = \frac{68}{108} = 0{,}629$. Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες διαπιστώνουμε ότι $\hat{B} = 51^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\alpha = 30$ cm. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Gamma}$ και η πλευρά β.**

Λύση



Από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ έχουμε

$120^\circ + 45^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή

$\hat{\Gamma} = 180^\circ - 165^\circ$ ή $\hat{\Gamma} = 15^\circ$.

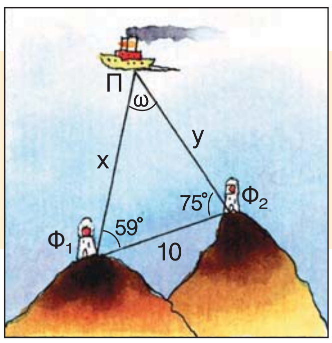
Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B}$ ή $\frac{30}{\text{ημ}120^\circ} = \frac{\beta}{\text{ημ}45^\circ}$ ή $\beta \cdot \text{ημ}120^\circ = 30 \cdot \text{ημ}45^\circ$ *(1)*.

Επειδή $\text{ημ}120^\circ = \text{ημ}(180^\circ - 60^\circ) = \text{ημ}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{ημ}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ η ισότητα *(1)* γράφεται:

$\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\beta = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ή $\beta = \frac{30\sqrt{6}}{3}$ ή $\beta = 10\sqrt{6}$ cm.

2 **Δύο φάροι Φ_1, Φ_2 απέχουν μεταξύ τους 10 μίλια. Ένα πλοίο Π βρίσκεται σε μια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι αποστάσεις x, y του πλοίου από κάθε φάρο.**



Λύση

Στο τρίγωνο $\Pi\Phi_1\Phi_2$ έχουμε $\omega + 59^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, οπότε $\omega = 46^\circ$. Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$\frac{10}{\text{ημ}46^\circ} = \frac{x}{\text{ημ}75^\circ} = \frac{y}{\text{ημ}59^\circ}$.

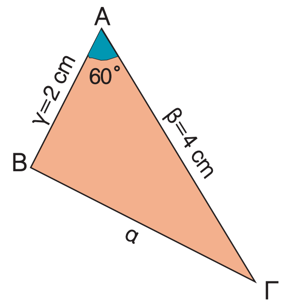
Από την ισότητα $\frac{10}{\eta\mu 46^\circ}=\frac{x}{\eta\mu 75^\circ}$ έχουμε $x=\frac{10\cdot\eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$ ή $x=\frac{10\cdot 0{,}966}{0{,}719}=13{,}44$ μίλια.

Από την ισότητα $\frac{10}{\eta\mu 46^\circ}=\frac{y}{\eta\mu 59^\circ}$ έχουμε $y=\frac{10\cdot\eta\mu 59^\circ}{\eta\mu 46^\circ}$ ή $y=\frac{10\cdot 0{,}857}{0{,}719}=11{,}92$ μίλια.

Επομένως το πλοίο Π απέχει από το φάρο Φ_1 13,44 μίλια και από το φάρο Φ_2 11,92 μίλια.

3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=60^\circ$, $\beta=4$ cm και $\gamma=2$ cm. Να υπολογιστεί η πλευρά α και οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.

Λύση



Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ ή $\alpha^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu 60^\circ$

ή $\alpha^2=16+4-16\cdot\frac{1}{2}$ ή $\alpha^2=12$.

Άρα $\alpha=\sqrt{12}$ δηλαδή $\alpha=2\sqrt{3}$ cm.

Ομοίως έχουμε:

$\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$ ή $4^2=2^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu B$ ή

$16=4+12-8\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu B$ ή $8\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu B=0$ ή $\sigma\upsilon\nu B=0$, οπότε $\hat{B}=90^\circ$.

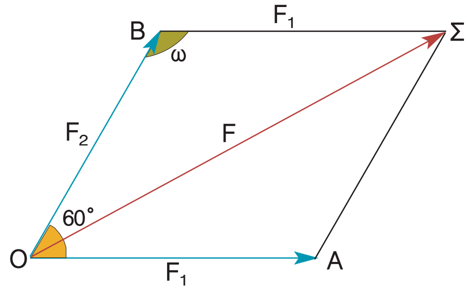
Αφού $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ και $\hat{A}=60^\circ$, $\hat{B}=90^\circ$, έχουμε $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

4 Δύο δυνάμεις $F_1=4$ N και $F_2=3$ N εφαρμόζονται σ' ένα υλικό σημείο Ο και σχηματίζουν γωνία $\omega=60^\circ$. Να υπολογιστεί η συνισταμένη τους F.

Λύση

Η συνισταμένη F των δυνάμεων F_1, F_2, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΟΑΣΒ. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΣ και επειδή $B\Sigma=F_1$, έχουμε:

$F^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\omega$ *(1)*.

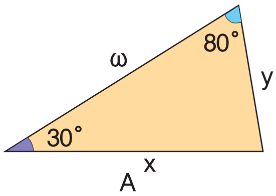


Οι γωνίες όμως ω και 60° είναι παραπληρωματικές, οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega=-\sigma\upsilon\nu 60^\circ$ και ο τύπος *(1)* γράφεται:

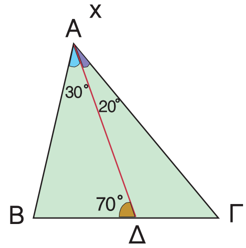
$F^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\sigma\upsilon\nu 60^\circ$ ή $F^2=4^2+3^2+2\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2}$ ή $F^2=37$, οπότε

$F=\sqrt{37}$ N ή $F=6{,}08$ N.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



1 Να γράψετε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος ____ = ____ = ____



2 Να γράψετε το νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο ΑΒΔ ____ = ____ = ____

β) στο τρίγωνο ΑΔΓ ____ = ____ = ____

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

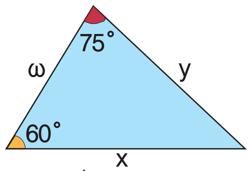
α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει αημΒ = βημΑ. ☐

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 100^\circ$, τότε $\dfrac{\beta}{\eta\mu 100^\circ} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu 20^\circ}$. ☐

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$. ☐

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{\Gamma} = 80^\circ$, τότε ισχύει $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80^\circ$. ☐

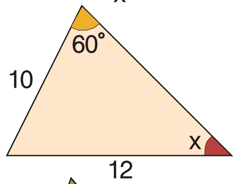
ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, τότε ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$. ☐



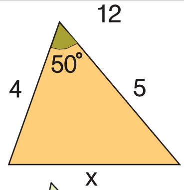
4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων:

$x^2 =$ .... $y^2 =$ .... $\omega^2 =$ ....

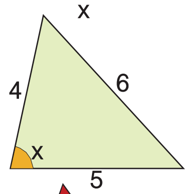
5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις



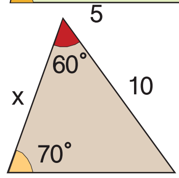
α) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των ....
από την ισότητα ....



β) Η πλευρά x υπολογίζεται με το νόμο των ....
από την ισότητα ....



γ) Η γωνία x υπολογίζεται με το νόμο των ....
από την ισότητα ....

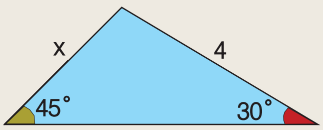


δ) Η πλευρά x υπολογίζεται με το νόμο των ....
από την ισότητα ....

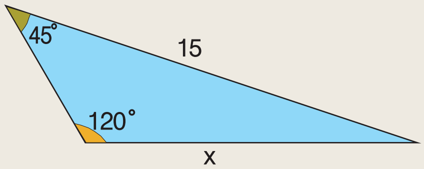
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

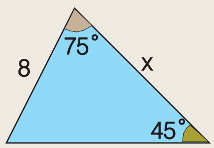
α)



β)

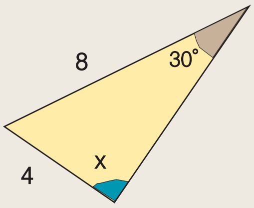


γ)

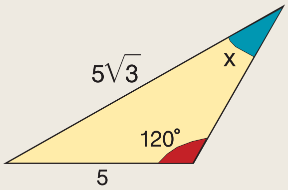


2 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

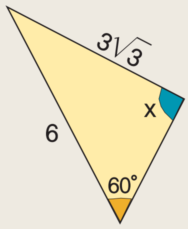
α)



β)



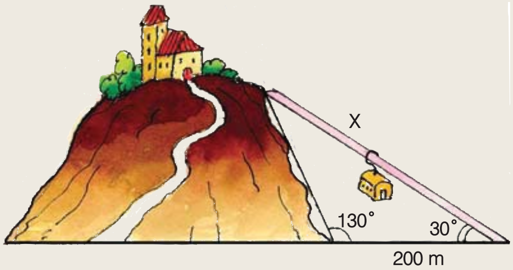
γ)



3 Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, όταν:
α) $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\hat{B} = 30^\circ$ **β)** $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^\circ$, $\beta = 10$, $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5 Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής x του εναέριου σιδηροδρόμου στο διπλανό σχήμα. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



6 Ένας μαθητής απευθυνόμενος στον καθηγητή του των Μαθηματικών είπε:

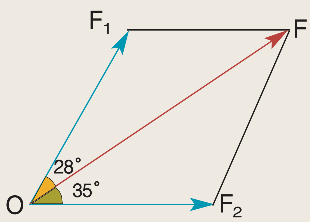
– Κύριε, σε ένα βιβλίο βρήκα μια άσκηση στην οποία έδινε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $\hat{B} = 60^\circ$ και ζητούσε να βρεθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του. Πώς λύνεται;

Ο καθηγητής αφού είδε την άσκηση τού είπε:

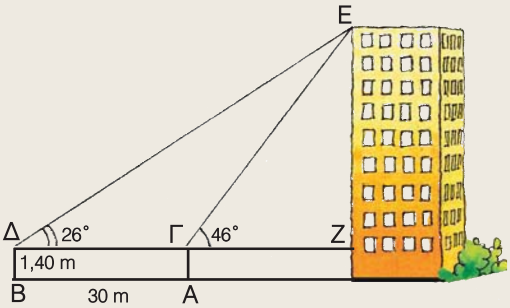
– Κάποιο λάθος έχεις κάνει, γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

Πώς το κατάλαβε ο καθηγητής;

7 Οι δυνάμεις F_1, F_2 έχουν συνισταμένη $F = 10$ N που σχηματίζει με την F_1 γωνία 28° και με την F_2 γωνία 35°. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις F_1, F_2. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*

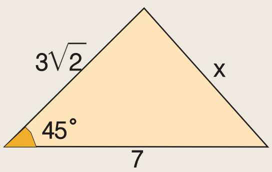


8 Ένας τοπογράφος για να μετρήσει το ύψος ενός ψηλού κτιρίου τοποθέτησε το γωνιόμετρό του στο σημείο Α και βρήκε τη γωνία $E\hat{\Gamma}Z = 46^\circ$. Στη συνέχεια μετακινήθηκε κατά 30 m, τοποθέτησε το γωνιόμετρο στη θέση Β και βρήκε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma = 26^\circ$. Ποιο ήταν το ύψος του κτιρίου, αν το γωνιόμετρο έχει ύψος 1,4 m.
(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

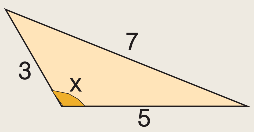


9 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

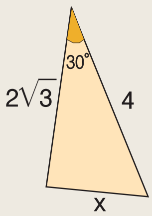
α)



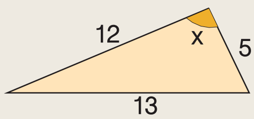
β)



γ)

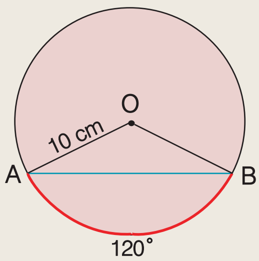


δ)

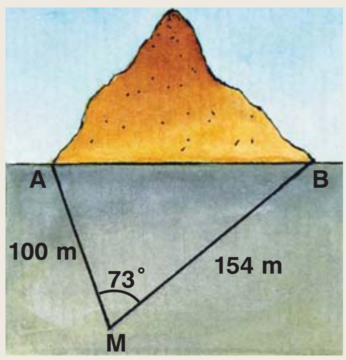


10 Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, αν $\hat{A} = 120^\circ$ και $\alpha = 3\sqrt{3}$.

11 Σε κύκλο με ακτίνα $R = 10$ cm, η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί σε τόξο 120°. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής.

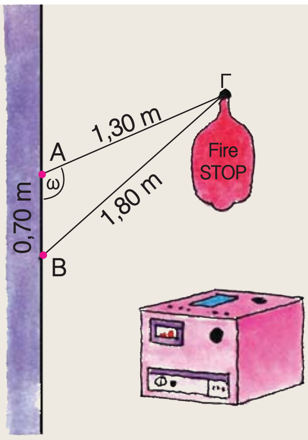


12 Να υπολογίσετε τις διαγωνίους παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ=4, ΒΓ=3 και $\hat{A} = 120^\circ$.



13 Μια τεχνική εταιρεία θέλει να καταθέσει μια προσφορά για την κατασκευή μιας σήραγγας ΑΒ. Ένας μηχανικός της εταιρείας με τους συνεργάτες του έστησε ένα γωνιόμετρο στη θέση Μ που η απόστασή του από το Α ήταν 100 m και από το Β ήταν 154 m. Αφού μέτρησε τη γωνία $A\hat{M}B = 73^\circ$, ισχυρίστηκε ότι με αυτά τα στοιχεία μπορούσε να υπολογίσει το μήκος της σήραγγας. Είχε δίκιο ή άδικο; Πόσο ήταν τελικά το μήκος της σήραγγας; *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*

14 Ένας πυροσβεστήρας αυτόματης κατάσβεσης πρόκειται να στηριχτεί πάνω από τον καυστήρα ενός καλοριφέρ. Ένας τεχνικός θέλει να κατασκευάσει τη βάση στήριξής του και διαθέτει τρεις μεταλλικές βέργες ΑΒ = 0,70 m, ΑΓ = 1,30 m και ΒΓ = 1,80 m. Για να κολλήσει όμως κατάλληλα τις βέργες ΑΒ, ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να γνωρίζει τη γωνία ω. Μπορείτε εσείς να την υπολογίσετε, ώστε να βοηθήσετε τον τεχνικό; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).



ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Υπολογισμός της απόστασης απρόσιτων σημείων.

Υπολογισμός του ύψους ενός ψηλού κτιρίου, ενός βουνού, της απόστασης δύο υφάλων, δύο φάρων κ.τ.λ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να αποδείξετε ότι:

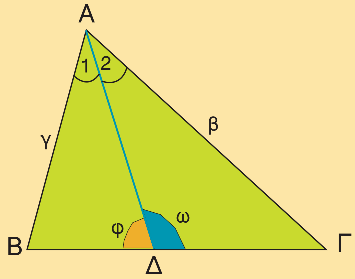
α) $(1 - ημx + συνx)^2 = 2(1 - ημx)(1 + συνx)$ β) $\dfrac{1 + συνx}{ημx} + \dfrac{ημx}{1 + συνx} = \dfrac{2}{ημx}$

2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy δίνεται το σημείο Α(4, 0) και το σημείο Μ που έχει τετμημένη –5 και η απόστασή του από το Ο είναι 13. Αν ω είναι η γωνία $A\hat{O}M$, να υπολογίσετε το συνω και την απόσταση ΑΜ.

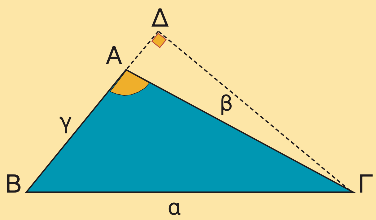
3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 30 cm, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\hat{Γ} = 75^\circ$. Να χαράξετε τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου ΑΔ.

4 Αν ΑΔ διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

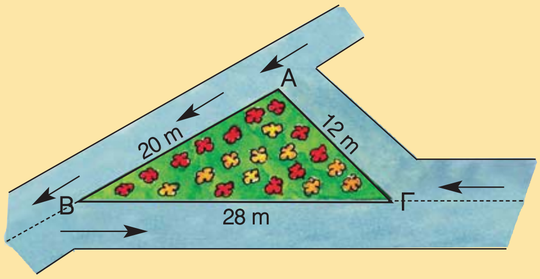
α) $\dfrac{γ}{ΒΔ} = \dfrac{ημφ}{ημΑ_1}$ β) $\dfrac{β}{ΓΔ} = \dfrac{ημω}{ημΑ_2}$ γ) $\dfrac{γ}{β} = \dfrac{ΒΔ}{ΓΔ}$



5 **α)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι $Ε = \frac{1}{2}βγ\,ημΑ$.



β) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$ και το εμβαδόν του κήπου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



6 **α)** Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ^2Α = ημ^2Β + ημ^2Γ$, τότε να αποδειξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ(Β + Γ) + συν(Β - Γ) = 2$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

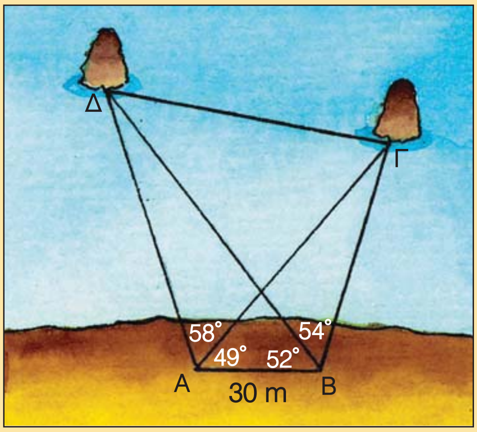
7 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $α(ημΒ - ημΓ) + β(ημΓ - ημΑ) + γ(ημΑ - ημΒ) = 0$ **β)** $α = βσυνΓ + γσυνΒ$

γ) $β^2 - γ^2 = α(βσυνΓ - γσυνΒ)$ **δ)** $\frac{συνΑ}{α} + \frac{συνΒ}{β} + \frac{συνΓ}{γ} = \frac{α^2 + β^2 + γ^2}{2αβγ}$

8 Να βρείτε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, αν τα μήκη τους είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, η γ είναι η μικρότερη πλευρά και $συνΓ = \frac{3}{4}$.

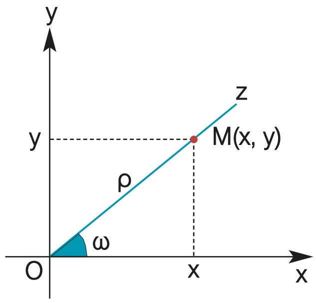
9 Δύο φίλοι τοποθέτησαν τα γωνιόμετρά τους στις θέσεις Α, Β μιας ακτής και παρατήρησαν δύο βράχους που προεξείχαν από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν η απόσταση ΑΒ ήταν 30 m και τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα, τότε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο βράχων. *(Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).*



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, αν είναι $\omega = x\hat{O}z$, και M(x, y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της πλευράς Oz, διαφορετικό από το O, τότε:



$$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho},\ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho},\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}.$$

Π.χ. αν M(1, 2), τότε $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$\eta\mu\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},\quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},\quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{2}{1} = 2.$$

- Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω με $0^\circ \le \omega \le 180^\circ$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα:

ω	0°		90°		180°
ημω		+		+	
συνω		+		–	
εφω		+		–	

- Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu\omega(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

Π.χ. $\eta\mu160^\circ = \eta\mu20^\circ \qquad \sigma\upsilon\nu160^\circ = -\sigma\upsilon\nu20^\circ \qquad \varepsilon\varphi160^\circ = -\varepsilon\varphi20^\circ$

- Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι:

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω).

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (Ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$)

Π.χ. $\eta\mu^2 35^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 35^\circ = 1, \qquad \varepsilon\varphi35^\circ = \dfrac{\eta\mu35^\circ}{\sigma\upsilon\nu35^\circ}$

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

  – Νόμος των ημιτόνων: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

  – Νόμος των συνημιτόνων:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\ \sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\ \sigma\upsilon\nu\Gamma$$