3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

✓ *Μαθαίνω τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και πώς παριστάνεται γραφικά.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y, βρίσκουμε άθροισμα 6.

α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y.

β) Ποια από τα ζεύγη (–1, 8), (0, 6), (–2, 7), (2, 2) (3, 0), (3, 5) επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;

γ) Σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία όσα από τα προηγούμενα ζεύγη επαληθεύουν τη σχέση. Με τη βοήθεια ενός χάρακα να εξετάσετε αν όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ε.

δ) Πάνω στην ευθεία ε να πάρετε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ και να εξετάσετε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση.

Η εξίσωση $αx + βy = γ$

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση με δύο αγνώστους x, y και η οποία είναι της μορφής $αx + βy = γ$.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x + y = 6$ είναι της μορφής αυτής, με $α = 2$, $β = 1$ και $γ = 6$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ και $y = 4$ η εξίσωση $2x + y = 6$ επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 1 + 4 = 6$, ενώ για $x = 3$ και $y = 5$ δεν επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 3 + 5 = 11 \neq 6$.

Το ζεύγος των αριθμών (1, 4) που επαληθεύει την εξίσωση $2x + y = 6$, λέμε ότι είναι μία **λύση** της.

Γενικά

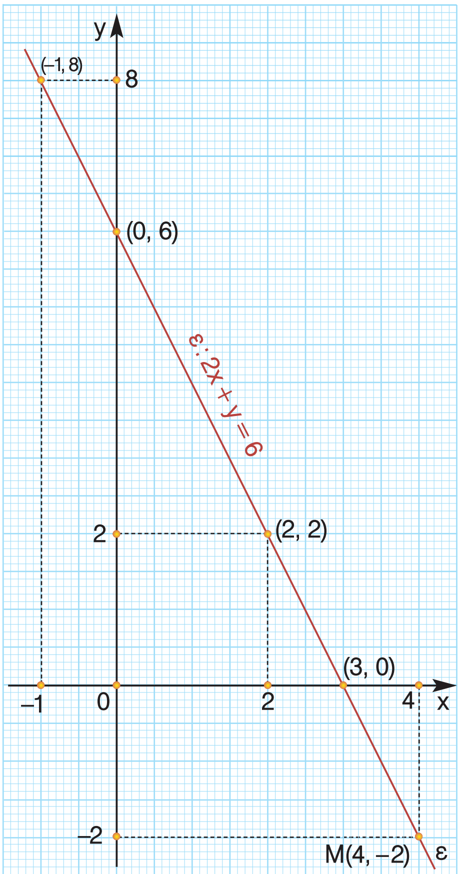
Λύση μιας εξίσωσης $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

Η εξίσωση όμως $2x + y = 6$ δεν έχει λύση μόνο το ζεύγος (1, 4), αλλά έχει **άπειρες λύσεις**. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη τιμή του y, ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση της και έτσι να σχηματίσουμε έναν πίνακα τιμών.

Για $x = -1$ έχουμε $2 \cdot (-1) + y = 6$, οπότε $y = 8$.
Για $x = 0$ έχουμε $2 \cdot 0 + y = 6$, οπότε $y = 6$.
Για $x = 2$ έχουμε $2 \cdot 2 + y = 6$, οπότε $y = 2$.
Για $x = 3$ έχουμε $2 \cdot 3 + y = 6$, οπότε $y = 0$ κ.τ.λ.

x	–1	0	2	3
y	8	6	2	0

Άρα τα ζεύγη (–1, 8), (0, 6), (2, 2), (3, 0), ... είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 6$.



Αν σ' ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που καθένα έχει συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης $2x + y = 6$, παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία ε.

Αντιστρόφως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε, π.χ. το $M(4, –2)$, παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $2x + y = 6$, αφού $2 \cdot 4 + (–2) = 6$. Άρα κάθε σημείο της ευθείας ε έχει συντεταγμένες (x, y) που είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

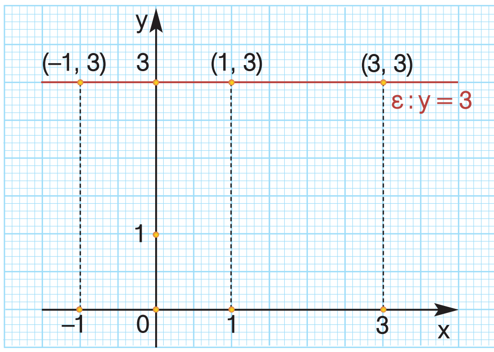
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση $2x + y = 6$ παριστάνει την ευθεία ε και συμβολίζεται ε: $2x + y = 6$.

Γενικά

- **Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.**
- **Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.**

Ειδικές περιπτώσεις

Η εξίσωση y = k.



Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $0x + 2y = 6$, που είναι της μορφής $αx + βy = γ$ με $α = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του x έχουμε $y = 3$.

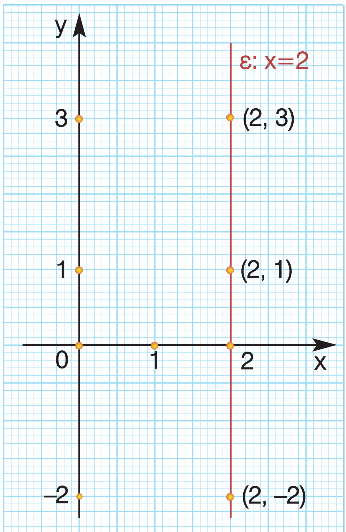
Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(–1, 3)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$, κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

Επομένως, η εξίσωση $0x + 2y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη $y = 3$ και τετμημένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x′x που τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο $(0, 3)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 3$.

Γενικά

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x′x και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο $(0, k)$, ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x′x

Η εξίσωση x = k



Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $3x + 0y = 6$, που είναι της μορφής αx + βy = γ με β = 0, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του y έχουμε x = 2. Για παράδειγμα, τα ζεύγη (2, –2), (2, 1), (2, 3), κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

Επομένως, η εξίσωση 3x + 0y = 6 παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τετμημένη x = 2 και τεταγμένη οποιονδήποτε αριθμό. Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα y′y που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (2, 0).

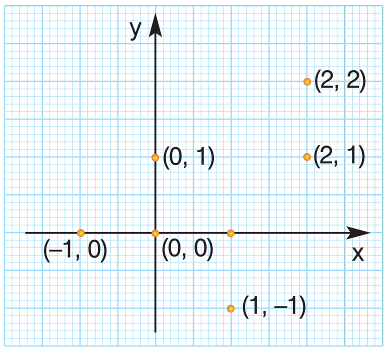
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση x = 2.

Γενικά

Η εξίσωση x = k με k ≠ 0 παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y′y και τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (k, 0), ενώ η εξίσωση x = 0 παριστάνει τον άξονα y′y

Η εξίσωση αx + βy = γ με α = β = 0

- Η εξίσωση $0x + 0y = 7$ δεν παριστάνει ευθεία, αφού κανένα ζεύγος αριθμών (x, y) δεν είναι λύση της (**αδύνατη εξίσωση**).
- Η εξίσωση $0x + 0y = 0$ επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών (x, y). Για παράδειγμα, τα ζεύγη (–1, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 2), κ.τ.λ. είναι λύσεις της (**αόριστη εξίσωση**). Τα σημεία όμως, που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα η εξίσωση 0x + 0y = 0 δεν παριστάνει ευθεία, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Εξισώσεις, όπως οι $2x + y = 6$, $0x + 2y = 6$, $3x + 0y = 6$, $0x + 0y = 7$, $0x + 0y = 0$, ονομάζονται **γραμμικές εξισώσεις** με δύο αγνώστους x, y. Όπως διαπιστώσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα μόνο οι τρεις πρώτες παριστάνουν ευθεία. Στις εξισώσεις αυτές ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές των x,y είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Γενικά

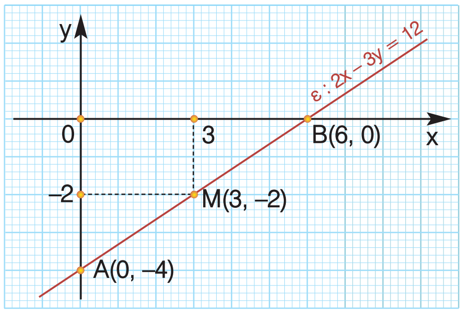
Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής αx + βy = γ και παριστάνει ευθεία όταν α ≠ 0 ή β ≠ 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **α) Να σχεδιαστεί η ευθεία ε : $2x - 3y = 12$.**
β) Ένα σημείο Μ έχει τεταγμένη –2. Ποια πρέπει να είναι η τετμημένη του, ώστε το σημείο ν' ανήκει στην ευθεία ε;

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία ε : $2x - 3y = 12$ αρκεί να προσδιορίσουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $-3y = 12$, οπότε $y = -4$.
Για $y = 0$ έχουμε $2x = 12$, οπότε $x = 6$.
Άρα η εξίσωση $2x - 3y = 12$ παριστάνει ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α(0, –4) και Β(6, 0).



β) Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε, αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αφού το σημείο Μ έχει τεταγμένη $y = -2$ για την τετμημένη του x πρέπει να ισχύει $2x - 3(-2) = 12$ ή $2x + 6 = 12$ ή $2x = 6$ ή $x = 3$.

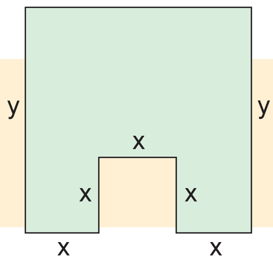
Άρα η τετμημένη του Μ είναι $x = 3$.

2 **Αν η ευθεία ε : $αx - y = 1$ διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), τότε να προσδιοριστεί η τιμή του α και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία τής ε με τους άξονες.**

Λύση

Η ευθεία ε : $αx - y = 1$ διέρχεται από το σημείο Α(2, 5), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση $αx - y = 1$. Άρα έχουμε $2α - 5 = 1$ ή $2α = 6$ ή $α = 3$. Επομένως η ευθεία ε έχει εξίσωση $3x - y = 1$.
Για $x = 0$ έχουμε $3 \cdot 0 - y = 1$ ή $-y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, –1).
Για $y = 0$ έχουμε $3x - 0 = 1$ ή $3x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

3 **Η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι 40 m.**
α) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα x, y.
β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, ποια είναι η μέγιστη τιμή του x;



Λύση

α) Η περίμετρος του σχήματος είναι $5x + y + 3x + y$, άρα ισχύει
$$5x + y + 3x + y = 40 \text{ ή } 8x + 2y = 40 \text{ ή } 4x + y = 20 \quad (1).$$
β) Αν η ελάχιστη τιμή του y είναι 10 m, τότε η μεταβλητή y παίρνει τιμές από 10 και πάνω, δηλαδή ισχύει $y \geq 10$. Από την ισότητα (1) έχουμε $y = 20 - 4x$, οπότε πρέπει $20 - 4x \geq 10$ ή $-4x \geq 10 - 20$ ή $-4x \geq -10$ ή $x \leq 2{,}5$. Άρα η μεταβλητή x παίρνει τιμές από 2,5 και κάτω, οπότε η μέγιστη τιμή της είναι 2,5 m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα ζεύγη (3, 2), (1, 5), (0, 6), (–3, 10), (–2, 8) είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Το σημείο (3, –2) ανήκει στην ευθεία ε : $3x - y = 7$.

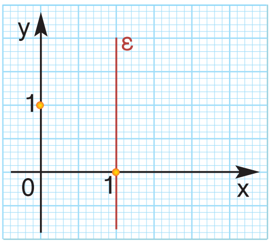
β) Η ευθεία ε : $5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο (–2, 0).

γ) Η ευθεία ε : $2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

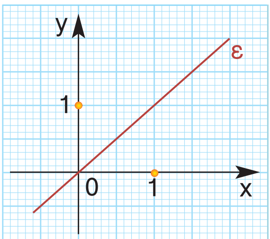
δ) Η ευθεία ε : $3x + y = 6$ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, 3).

3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:

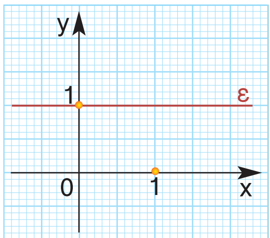
1. $y = 1$ **2.** $x = -1$ **3.** $y = x$ **4.** $x = 1$



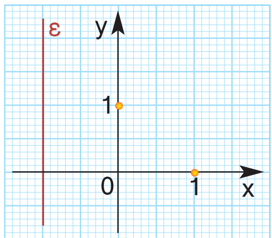
(σχήμα α)



(σχήμα β)



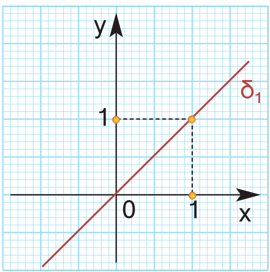
(σχήμα γ)

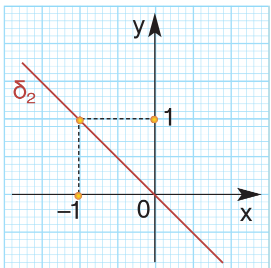


(σχήμα δ)

α	β	γ	δ

4 Οι ευθείες $δ_1$, $δ_2$ διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.





i) Η εξίσωση της $δ_1$ είναι: **α)** $x = 1$ **β)** $y = 1$ **γ)** $y = x$ **δ)** $y = -x$

ii) Η εξίσωση της $δ_2$ είναι: **α)** $x = -1$ **β)** $y = -1$ **γ)** $y = x$ **δ)** $y = -x$

5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –3) και είναι παράλληλη στον άξονα x′x έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ **β)** $x = 4$ **γ)** $x = -3$ **δ)** $y = -3$ **ε)** $4x - 3y = 0$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –2) και είναι παράλληλη στον άξονα y′y έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ **β)** $x = 4$ **γ)** $x = -2$ **δ)** $y = -2$ **ε)** $4x - 2y = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:
α) $\varepsilon_1 : 2x - y = 2$ β) $\varepsilon_2 : -4x + 2y = 10$ γ) $\varepsilon_3 : 10x - 5y = 20$
Τι παρατηρείτε;

2 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 6x + 2y = 8 - 2\lambda$.
α) Να βρείτε τον αριθμό λ, ώστε η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Για $\lambda = 4$ να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

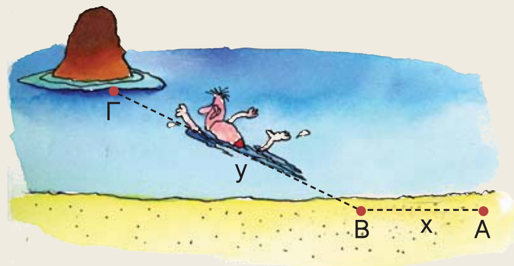
3 Αν η ευθεία $\varepsilon : 4x + 3y = 12$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, τότε:
α) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

4 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x = -4$, $\varepsilon_2 : 3y = 6$ και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
β) Ποια από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το προηγούμενο σημείο;
$\zeta_1 : 2x - y = 6$, $\zeta_2 : 3x + y = 10$ και $\zeta_3 : -5x + 3y = 16$

5 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
$x = -1$, $x = 5$, $y = -2$ και $y = 3$
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται.

6 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι:
α) παράλληλη στον άξονα $x'x$ β) παράλληλη στον άξονα $y'y$.
Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.

7 Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύμπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:



α) Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x, y.
β) Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύμπησε;

8 Σ' ένα ξενώνα υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Αν ο ξενώνας έχει συνολικά 25 κρεβάτια, τότε να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x, y. Να χαράξετε σε τετραγωνισμένο χαρτί την αντίστοιχη ευθεία και από το σχήμα να διαπιστώσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια είναι δυνατό να έχει ο ξενώνας.

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

✓ *Μαθαίνω τι λέγεται γραμμικό σύστημα και πώς επιλύεται γραφικά.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + y = 8$.

2. Να βρείτε το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους και να εξετάσετε αν είναι λύση και των δύο εξισώσεων.

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y,

π.χ. $x + y = 5$ και $2x + y = 8$

και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y**.

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος των αριθμών (3, 2) επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, αφού $\begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot 3 + 2 = 8 \end{cases}$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ζεύγος (3, 2) είναι **λύση** του συστήματος.

Γενικά

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Πώς όμως μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y; Δηλαδή πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε ζεύγος (x, y) που να είναι λύση του;

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y επιλύεται γραφικά αλλά και αλγεβρικά.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

Σύστημα με μοναδική λύση

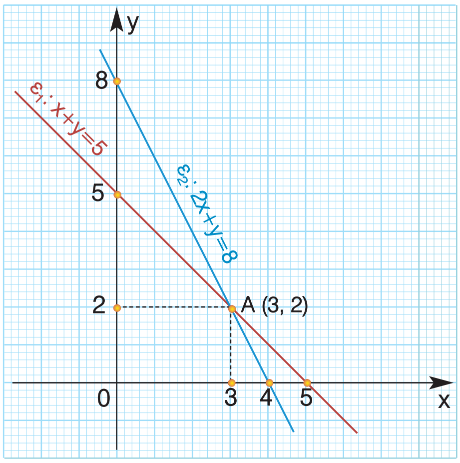
Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος π.χ. του $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες

$\varepsilon_1 : \ x + y = 5$ και

$\varepsilon_2 : 2x + y = 8$,

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα **τέμνονται** στο σημείο Α. Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (3, 2) του **κοινού σημείου** Α των ευθειών αυτών.



Επειδή το σημείο Α(3, 2) ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του $x = 3$ και $y = 2$ επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα το ζεύγος (3, 2) είναι λύση του συστήματος. Οι ευθείες όμως ε_1, ε_2 δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε και το σύστημα δεν έχει άλλη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος (3, 2) είναι η **μοναδική** λύση του συστήματος.

Αδύνατο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

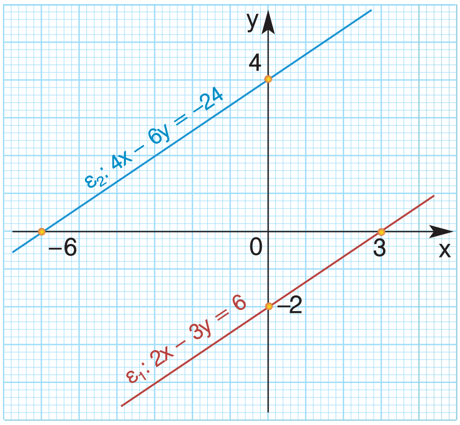
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 2x - 3y = 6$ και

$\varepsilon_2 : 4x - 6y = -24$,

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα είναι **παράλληλες**. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα **δεν έχει λύση**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Αόριστο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

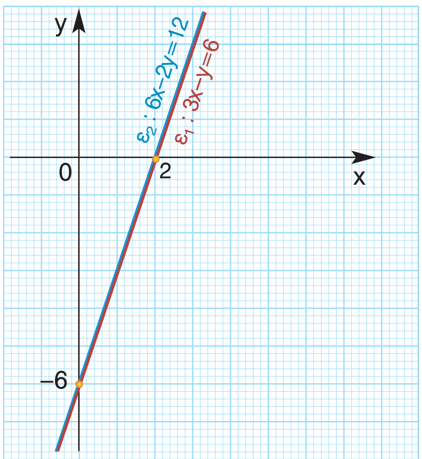
$$\begin{cases} 3x - \ y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 3x - y = 6$ και

$\varepsilon_2 : 6x - 2y = 12$,

οι οποίες, όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα, **συμπίπτουν (ταυτίζονται)**. Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.

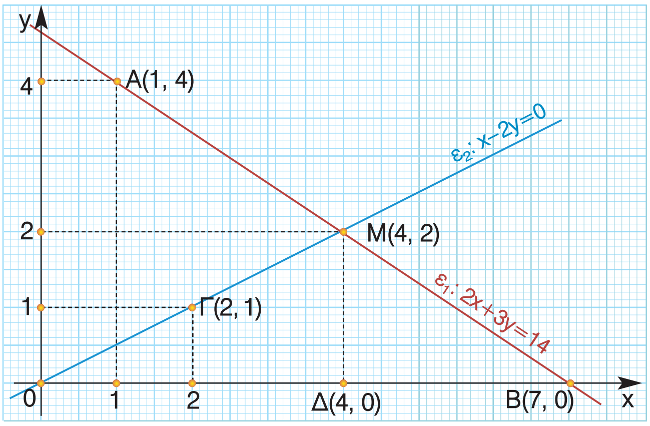


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 14$, $\varepsilon_2: x - 2y = 0$ και ο άξονας $x'x$.

Λύση



α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1: 2x + 3y = 14$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 1$ έχουμε $2 + 3y = 14$ ή $3y = 12$, οπότε $y = 4$.
Για $x = 7$ έχουμε $2\cdot 7 + 3y = 14$ ή $3y = 0$, οπότε $y = 0$.
Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Α(1, 4) και Β(7, 0).
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2: x - 2y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $-2y = 0$, οπότε $y = 0$.
Για $x = 2$ έχουμε $2 - 2y = 0$ ή $-2y = -2$, οπότε $y = 1$.
Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Γ(2, 1).
Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το Μ(4, 2), οπότε το σύστημα (Σ) έχει μία λύση την $(x, y) = (4, 2)$.

β) Το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1, ε_2 και ο άξονας $x'x$ είναι το ΟΜΒ, το οποίο έχει βάση ΟΒ = 7 και ύψος ΜΔ = 2.
Άρα το εμβαδόν του είναι $E = \dfrac{7 \cdot 2}{2} = 7$ τετραγωνικές μονάδες.

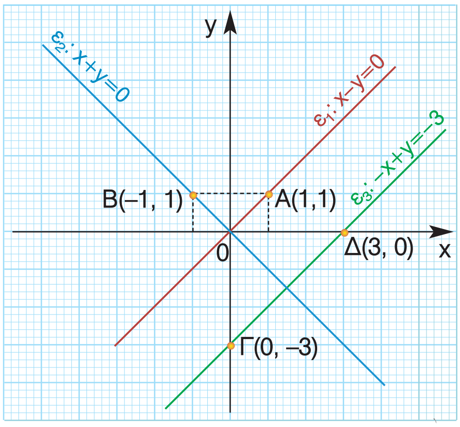
2 Να σχεδιάσετε τις ευθείες: $\varepsilon_1: x - y = 0$, $\varepsilon_2: x + y = 0$, $\varepsilon_3: -x + y = -3$.
Πόσες λύσεις έχει καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

$(\Sigma_1): \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $(\Sigma_2): \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

Λύση

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_1: x - y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = 1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Α(1, 1).
Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon_2: x + y = 0$ προσδιορίζουμε δύο σημεία της.
Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = -1$ έχουμε $y = 1$. Άρα η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Β(–1, 1).

Σχεδιάζουμε και την ευθεία $\varepsilon_3 : -x + y = -3$. Για $x = 0$ έχουμε $y = -3$ και για $y = 0$ έχουμε $x = 3$. Άρα η ευθεία ε_3 διέρχεται από τα σημεία Γ(0, –3) και Δ(3, 0).



Το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση την (0, 0), αφού οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Ο(0, 0), ενώ το σύστημα (Σ_2) είναι αδύνατο, αφού οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου:

α) Α(–3, 2) **β)** Β(1, –1) **γ)** Γ(1, –4) **δ)** Δ(2, –3)

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες ε_1 και ε_2, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

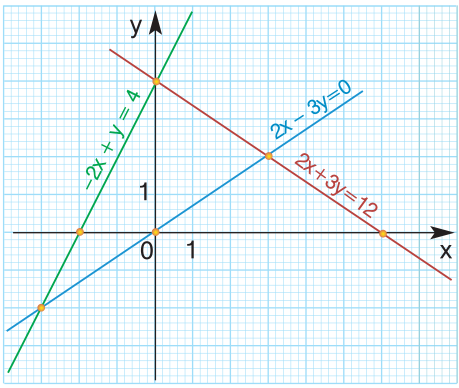
Στήλη Α	Στήλη Β
α. Οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται.	**1.** Το σύστημα είναι αόριστο.
β. Οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες.	**2.** Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες ε_1, ε_2 συμπίπτουν.	**3.** Το σύστημα είναι αδύνατο.

α	β	γ

3 Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.

α) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$

2 Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

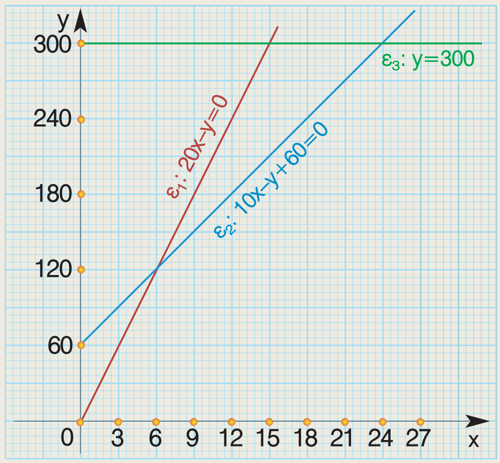
3 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου δύο αυτοκινήτων Α και Β. Να βρείτε:

α) Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου.

β) Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνησή τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και ποια θα είναι αυτή;

4 Ένας φίλαθλος για να παρακολουθήσει τους αγώνες μιας ομάδας έχει τις εξής δυνατότητες:

– Να πληρώνει 20 € για καθε αγώνα που παρακολουθεί.
– Να πληρώσει 60 € ως αρχική συνδρομή και για κάθε αγώνα που παρακολουθεί να πληρώνει 10 €.
– Να πληρώσει 300 € και να παρακολουθεί όσους αγώνες επιθυμεί.



Η σχέση που συνδέει το πλήθος των αγώνων που θα παρακολουθήσει ο φίλαθλος με το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει σε κάθε περίπτωση παριστάνεται με σημεία μιας από τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3.

α) Να αντιστοιχίσετε κάθε περίπτωση σε μια από τις τρεις ευθείες.

β) Πόσους αγώνες πρέπει να παρακολουθήσει ένας φίλαθλος, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει να είναι τα ίδια στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση;

γ) Αν ο φίλαθλος παρακολούθησε τελικά 12 αγώνες, ποια περίπτωση ήταν η πιο συμφέρουσα;

δ) Αν παρακολούθησε μόνο 15 αγώνες και δεν είχε επιλέξει την πιο συμφέρουσα περίπτωση, πόσα ευρώ ζημιώθηκε;

ε) Πότε είναι πιο συμφέρουσα κάθε περίπτωση;

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

✓ *Μαθαίνω να λύνω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο:*
α) της αντικατάστασης β) των αντιθέτων συντελεστών
✓ *Μαθαίνω να λύνω προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατά τη διάρκεια ενός ποδοσφαιρικού πρωταθλήματος, από τους 30 αγώνες που έδωσε μια ομάδα ηττήθηκε στους 10, ενώ στους υπόλοιπους κέρδισε ή έφερε ισοπαλία. Για κάθε νίκη της πήρε 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία πήρε 1 βαθμό και για κάθε ήττα δεν πήρε βαθμό. Αν τελικά συγκέντρωσε 44 βαθμούς, πόσες φορές νίκησε και πόσες έφερε ισοπαλία;

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.
Η αλγεβρική όμως επίλυσή του, όπως θα δούμε σ' αυτή την παράγραφο, μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.
Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον ένα από τους δύο αγνώστους και να **καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο**. Δύο από τις μεθόδους με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό είναι οι εξής:

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης εργαζόμαστε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

Λύνουμε την εξίσωση $x + y = 20$ ως προς x και έχουμε $x = 20 - y$

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

Αντικαθιστούμε το x με $20 - y$ στην εξίσωση $x + 3y = 44$ και έχουμε:

$$(20 - y) + 3y = 44$$
$$20 + 2y = 44$$
$$2y = 44 - 20$$
$$2y = 24 \quad \text{άρα} \quad y = 12$$

- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Για $y = 12$ από την εξίσωση $x = 20 - y$ έχουμε:

$$x = 20 - 12$$
$$x = 8$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 8$, $y = 12$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (8, 12)$

Για επαλήθευση, αντικαθιστούμε τις τιμές x = 8 και y = 12 στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (8, 12) είναι λύση του, αφού $\begin{cases} 8 + 12 = 20 \\ 8 + 3 \cdot 12 = 44. \end{cases}$

Στην ίδια λύση θα καταλήγαμε και αν λύναμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς y.

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Αν στις δύο εξισώσεις, οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι αντίθετοι αριθμοί, τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα πιο γρήγορα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

Για παράδειγμα, στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ οι συντελεστές του y είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, τότε ο άγνωστος y απαλείφεται.

Έτσι έχουμε:

$$3x + 5x = 12 + 4 \text{ ή } 8x = 16, \text{ οπότε } x = 2.$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή του x σε μια από τις δύο εξισώσεις, π.χ. στην πρώτη, τότε έχουμε:

$$3 \cdot 2 + 2y = 12 \text{ ή } 2y = 6 \text{ ή } y = 3.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι x = 2, y = 3, δηλαδή το ζεύγος (x, y) = (2, 3).

Όταν όμως έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

στο οποίο δεν υπάρχουν αντίθετοι συντελεστές στον ίδιο άγνωστο τότε:

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο x, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το –2 και της δεύτερης με το 3, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 & \cdot (-2) \\ 2x + 7y = 8 & \cdot 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases}$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

$$\cancel{-6x} - 10y + \cancel{6x} + 21y = -2 + 24$$

$$11y = 22, \text{ οπότε } y = 2$$

- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

Αφού y = 2, η εξίσωση 3x + 5y = 1 γράφεται:

$$3x + 5 \cdot 2 = 17 \text{ ή } 3x + 10 = 1$$

$$3x = -9 \text{ ή } x = -3$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι x = –3, y = 2, δηλαδή το ζεύγος

(x, y) = (–3, 2)

Για επαλήθευση αντικαθιστούμε τις τιμές x = –3 και y = 2 στις εξισώσεις του συστήματος και διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (–3, 2) είναι λύση του, αφού $\begin{cases} 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1 \\ 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 8 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθούν δύο παραπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης κατά 12°.

Λύση

Αν ω, φ είναι οι δύο παραπληρωματικές γωνίες, τότε $ω + φ = 180°$. Αν ω είναι η μεγαλύτερη, τότε έχουμε και $ω = 3φ + 12°$. Για να βρούμε τις γωνίες ω, φ λύνουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων.

$$\begin{cases} ω + φ = 180° \\ ω = 3φ + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3φ + 12° + φ = 180° \\ ω = 3φ + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3φ + φ = 180° - 12° \\ ω = 3φ + 12° \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 4φ = 168° \\ ω = 3φ + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} φ = 42° \\ ω = 3 \cdot 42° + 12° \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} φ = 42° \\ ω = 138° \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες γωνίες είναι $ω = 138°$ και $φ = 42°$.

2 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (x + 2y) + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Λύση

Αντικαθιστούμε το $x + 2y$ με 4 στην πρώτη εξίσωση του συστήματος, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 4 + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 7 - 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x + 2 \cdot 3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x + 6 = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 - 6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -2$, $y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$.

3 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{2} - \dfrac{x + y}{8} = 1 \\[2ex] \dfrac{2x - 1}{5} + \dfrac{y - 3}{2} = 2 \end{cases}$

Λύση

Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και τις απαιτούμενες πράξεις, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 8 \cdot \dfrac{3x - y}{2} - 8 \cdot \dfrac{x + y}{8} = 8 \cdot 1 \\[2ex] 10 \cdot \dfrac{2x - 1}{5} + 10 \cdot \dfrac{y - 3}{2} = 10 \cdot 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4(3x - y) - (x + y) = 8 \\ 2(2x - 1) + 5(y - 3) = 20 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y - 15 = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 12x - 4y - x - y = 8 \\ 4x - 2 + 5y = 20 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 11x - 5y = 8 \\ 4x + 5y = 37 \end{cases}$$

Οι συντελεστές του αγνώστου y είναι αντίθετοι, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $11x + 4x = 8 + 37$ ή $15x = 45$ ή $x = 3$.
Αντικαθιστούμε την τιμή $x = 3$ στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$4 \cdot 3 + 5y = 37 \quad ή \quad 12 + 5y = 37 \quad ή \quad 5y = 25 \quad ή \quad y = 5.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 3$, $y = 5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, 5)$.

4 **Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολικής αξίας 90 ευρώ. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;**

Λύση

Αν x ήταν τα κέρματα των 50 λεπτών και y ήταν τα κέρματα του 1 ευρώ, τότε έχουμε την εξίσωση $x + y = 126$ *(1)*.
Η συνολική αξία των κερμάτων σε ευρώ ήταν $0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y$, οπότε έχουμε την εξίσωση $0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90$ *(2)*.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\left\{\begin{aligned} x + y &= 126 \\ 0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y &= 90 \end{aligned}\right. \left|\begin{aligned} &\\ &\cdot(-2)\end{aligned}\right. \quad ή \quad \left\{\begin{aligned} x + y &= 126 \\ -x - 2y &= -180 \end{aligned}\right.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $y - 2y = 126 - 180$ ή $-y = -54$ ή $y = 54$.

Αντικαθιστούμε την τιμή $y = 54$ στην πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$x + 54 = 126 \quad ή \quad x = 126 - 54 \quad ή \quad x = 72.$$

Άρα υπήρχαν 72 κέρματα των 50 λεπτών και 54 κέρματα του 1 ευρώ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση του συστήματος $\left\{\begin{aligned} x + y &= 6 \\ x - y &= 4 \end{aligned}\right.$

α) (2, 4) **β)** (7, –1) **γ)** (6, 2) **δ)** (5, 1)

2 Για την επίλυση του συστήματος $\left\{\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}\right.$

με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:

α) την πρώτη εξίσωση ως προς x; **β)** την πρώτη εξίσωση ως προς y;
γ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς x; **δ)** τη δεύτερη εξίσωση ως προς y;

3 Αν στο σύστημα $\left\{\begin{aligned} 3x + 5y &= -1 \\ 2x - 5y &= -9 \end{aligned}\right.$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει;

α) $3x = -1$ **β)** $2x = -9$ **γ)** $5x = -10$ **δ)** $5x = 10$

4 Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα;

$$\left\{\begin{array}{l|l} 5x + 4y = 9 & \ldots.. \\ -3x + 2y = 1 & \ldots.. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l|l} 4x - 3y = 1 & \ldots.. \\ 2x + 5y = 4 & \ldots.. \end{array}\right.$$

5 Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;

α) $\begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

6 Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$(\Sigma_1): \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\qquad (\Sigma_2): \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ -5x + 7y = 4 \end{cases}$

αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 4x - y = 10 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

2 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$

3 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2x + y}{4} = 3 \\ \dfrac{3x - y}{2} = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{4} - y = 1 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{x - 5}{2} + \dfrac{2y + 1}{3} = 3 \\ \dfrac{x + 4}{3} - \dfrac{y - 6}{2} = 4 \end{cases}$

4 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x - 3(2x + 3y) = 20 - x + y \\ 2(x - 2y) + 5(x - 2) = 3y + 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x(y + 4) = y(x - 6) - 15 + 3x \\ (x - 1)(x + 2y) = (x + y)^2 - y(y + 1) \end{cases}$

5 Να λύσετε τα συστήματα:

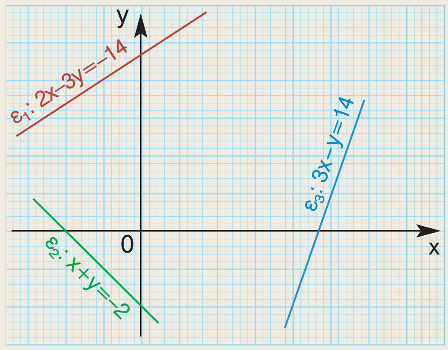
α) $\begin{cases} 1{,}3\alpha - 0{,}8\beta = 2{,}1 \\ 0{,}9\alpha + 0{,}4\beta = 0{,}5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{\omega}{4} - 0{,}2\varphi = 1{,}5 \\ 3\omega + 1{,}4\varphi = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2{,}5x + 3{,}2y = -1{,}8 \\ 1{,}6x - 2{,}4y = -5{,}6 \end{cases}$

6 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{\alpha} + \dfrac{4}{\beta} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{2}{\omega} - \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-6}{\omega} + \dfrac{9}{\varphi} = 1 \end{cases}$

7 Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x + 5y = 10$ και $\varepsilon_2 : x - y = 1$.

8 Οι ευθείες:
$\varepsilon_1 : 2x - 3y = -14$
$\varepsilon_2 : x + y = -2$
$\varepsilon_3 : 3x - y = 14$
τέμνονται έξω από το χαρτί σχεδίασης. Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων τους;



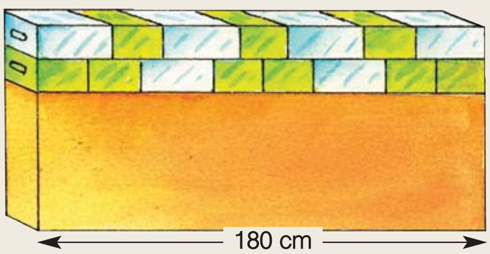
9 Αν $3 + 3 + 3 + ... + 3 + 5 + 5 + 5 + ... + 5 = 410$ και το πλήθος των προσθετέων του πρώτου μέλους είναι 100, να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 3 και πόσες φορές ο αριθμός 5.

10 Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει ως λύση $x = 1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των αριθμών α, β.

11 Η ευθεία με εξίσωση $\alpha x + y = \beta$ διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(–3, –2). Να βρείτε τις τιμές των α, β.

12 Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - \mu)x + \mu - 2\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς –1 και 3.

13 Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



14 Συσκευάσαμε 2,5 τόνους ελαιόλαδου σε 800 δοχεία των 2 και 5 κιλών. Να βρείτε πόσα δοχεία χρησιμοποιήσαμε από κάθε είδος.

15 Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και τη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16. Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες, ο βαθμός της Χημείας αυξήθηκε κατά 4 μονάδες με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε καθένα από τα δύο μαθήματα κατά το πρώτο τρίμηνο;

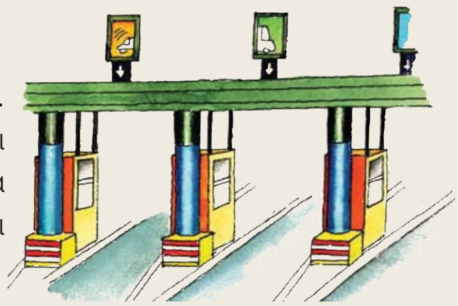
16 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα του απέχουν 58 cm. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

17 Αν οι μαθητές ενός τμήματος καθίσουν ανά ένας σε κάθε θρανίο, τότε θα μείνουν όρθιοι 8 μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δύο θα μείνουν κενά 4 θρανία. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία.

18 Μια ποτοποιία παρασκεύασε 400 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 38% vol, αναμειγνύοντας δύο ποιότητες με περιεκτικότητες 32% vol και 48% vol αντίστοιχα. Πόσα λίτρα από κάθε ποιότητα χρησιμοποίησε;

19 Ένα αυτοκίνητο μετά την ενεργοποίηση των φρένων του συνέχιζε να κινείται με ταχύτητα $υ = υ_0 - αt$, όπου t ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή του φρεναρίσματος. Αν 2 sec μετά το φρενάρισμα το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα 12m/sec και 2sec αργότερα είχε ταχύτητα 4 m/sec, να βρείτε την αρχική ταχύτητα $υ_0$ και την επιβράδυνση α. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή του φρεναρίσματος θα σταματήσει το αυτοκίνητο;

20 Από ένα σταθμό διοδίων πέρασαν 945 αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες και εισπράχτηκαν 1810 €. Αν ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου πλήρωσε 2 € και ο οδηγός κάθε μοτοσικλέτας πλήρωσε 1,2 €, να βρείτε πόσα ήταν τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες.



21 Σ' ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί τού αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = k \end{cases}$, όπου k πραγματικός αριθμός.

2 Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda + \mu)x + y = 7$ και $\varepsilon_2 : x + (\lambda + 3\mu)y = 1$ τέμνονται στο σημείο Α(2, 1), να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ.

3 Αν τα συστήματα $(\Sigma_1): \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$, και $(\Sigma_2): \begin{cases} 2x + \alpha y = \beta \\ 3x - \beta y = \alpha \end{cases}$
έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τους αριθμούς α, β.

4 Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y όταν:
α) $(x + y - 2)^2 + (2x - 3y + 1)^2 = 0$ **β)** $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$

5 Να λύσετε τα συστήματα:
α) $\begin{cases} (2x - 3y + 4)(x + y) = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} (3x - 4y)(x + 2y) = 8 \\ \dfrac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$

6 Να βρείτε δύο αριθμούς, που έχουν άθροισμα 100 και αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο, τότε θα προκύψει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 15.

7 Αν η εξίσωση $(2\lambda - \kappa - 3)x = \kappa - \lambda + 1$ είναι αόριστη, να βρείτε τους αριθμούς κ, λ.

8 Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά απέχουν 18 cm. Αν τα εμβαδά των δύο κύκλων διαφέρουν κατά 72π cm^2, να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

9 Να βρείτε τις ηλικίες δύο αδελφών, αν σήμερα διαφέρουν κατά 5 χρόνια, ενώ μετά από 11 χρόνια οι ηλικίες τους θα έχουν λόγο $\frac{4}{3}$.

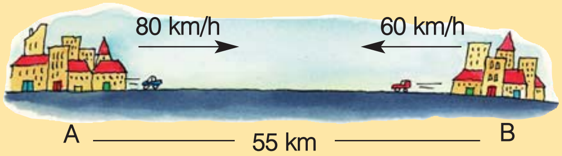
10 Σ' ένα ταξίδι με πλοίο, το εισιτήριο της Α′ θέσης κοστίζει 18 € και της Β′ θέσης κοστίζει 6 € λιγότερα. Αν σ' ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας 4500 €, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.

11 Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 10 και αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, τότε θα προκύψει αριθμός κατά 18 μικρότερος.

12 Αν διαιρέσουμε ένα διψήφιο αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 3. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του και τον αριθμό που προκύπτει τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 9. Ποιος είναι ο αρχικός διψήφιος αριθμός;

13 Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2 m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94 m^2. Αν όμως, αυξήσουμε το μήκος του κατά 4 m και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 6 m, το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104 m^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

14 Οι πόλεις Α και Β απέχουν 55 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και με μέση ταχύτητα 80 km/h κινείται προς την πόλη Β. Δεκαπέντε λεπτά μετά την εκκίνησή του ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 60 km/h κινείται προς την πόλη Α. Πόσο χρόνο κινήθηκε κάθε αυτοκίνητο μέχρι τη συνάντησή τους;



15 Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 km. Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες, ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Με ποια ταχύτητα κινείται κάθε αυτοκίνητο;

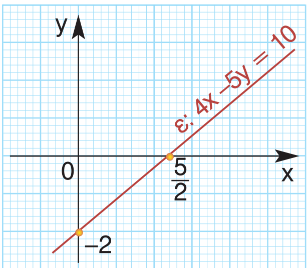
16 Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος, που μεσολαβεί από τη στιγμή που θα εισέλθει σε μια σήραγγα μήκους 180 m μέχρι τη στιγμή που και το τελευταίο του βαγόνι θα εξέλθει απ' αυτή, είναι 12 sec. Σε μια δεύτερη σήραγγα μήκους 930 m ο αντίστοιχος χρόνος που μεσολαβεί είναι 42 sec. Να βρείτε την ταχύτητα και το μήκος του τρένου.

17 Οι αντιστάσεις R_1, R_2, αν συνδεθούν παράλληλα, έχουν ολική αντίσταση 2,4 Ω. Αν η αντίσταση R_2 συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση 12 Ω, τότε η ολική τους αντίσταση είναι R_1. Να βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2.

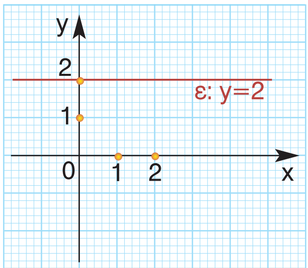
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

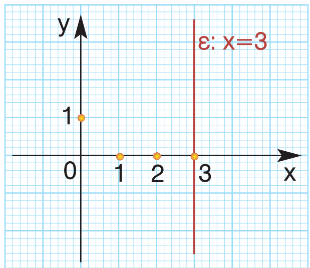
- **Γραμμική** εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$, π.χ. $3x + 2y = 7$.
- **Λύση** της γραμμικής εξίσωσης $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.
  Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (1, 2) είναι λύση της εξίσωσης $3x + 2y = 7$, αφού $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$.
- Η γραμμική εξίσωση $αx + βy = γ$ παριστάνει ευθεία ε, αν $α \neq 0$ ή $β \neq 0$.



Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$, τότε η γραμμική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ παριστάνει ευθεία που τέμνει και τους δύο άξονες.



Αν $\alpha=0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $y=\kappa$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ ή τον άξονα $x'x$.



Αν $\beta=0$, τότε η γραμμική εξίσωση είναι της μορφής $x=\kappa$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ ή τον άξονα $y'y$.

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Π.χ. αν το σημείο Μ(3, 4) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : \alpha x - y = 0$, τότε ισχύει $3 \cdot \alpha - 4 = 0$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή. Π.χ. το σημείο Μ(0, –2) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 4x - 5y = 10$, αφού $4 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) = 10$.

2. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \qquad \text{π.χ.} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

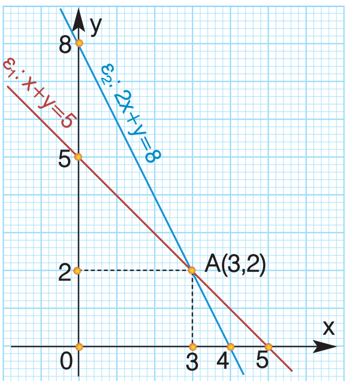
- **Λύση** του γραμμικού συστήματος (Σ) είναι κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του. Π.χ. το διατεταγμένο ζεύγος (2, –1) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 3y = 5 \end{cases}, \quad \text{αφού} \quad \begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \\ 2 - 3 \cdot (-1) = 5 \end{cases}$$

- Ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x, y λύνεται με τους εξής τρόπους:

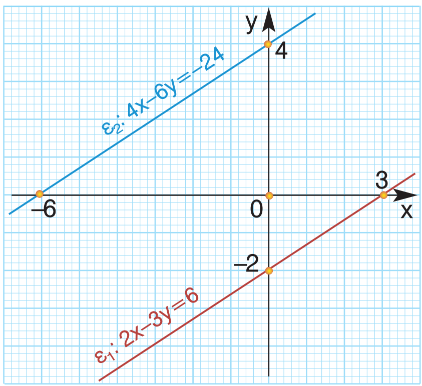
α) Γραφικά

Στο ίδιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τις εξισώσεις του συστήματος με δύο ευθείες ε_1, ε_2.

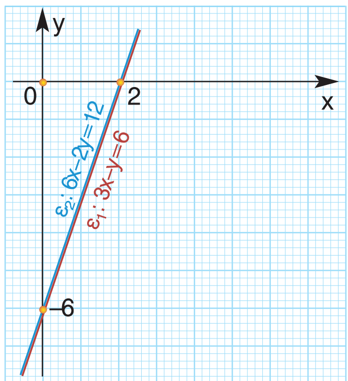


Αν οι ε_1, ε_2 **τέμνονται** σ' ένα σημείο, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους. Π.χ.

το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την (x, y) = (3, 2).



Αν οι ε_1, ε_2 είναι **παράλληλες** τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



Αν οι ε_1, ε_2 **ταυτίζονται**, τότε έχουν όλα τους τα σημεία κοινά, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.

β) Αλγεβρικά

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης ή των αντιθέτων συντελεστών προκειμένου να απαλείψουμε τον έναν από τους δύο αγνώστους του συστήματος και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο.